COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

LEÇONS

SUR LES

SÉRIES A TERMES POSITIFS

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

ÉMILE BOREL

RECUEILLIES ET RÉDIGÉES

PAR

ROBERT d'ADHÉMAR



PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1902

LEÇONS

SUR LES

SÉRIES A TERMES POSITIFS.

DU MÊME AUTEUR.

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments de la théorie des ensembles et applications*). Paris, Gauthier-Villars et fils, 1898 .... 3 fr. 50.

Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions. — **Leçons sur les fonctions entières**. Paris, Gauthier-Villars, 1900......................... 3 fr. 50.

Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions. — **Leçons sur les séries divergentes**. Paris, Gauthier-Villars, 1901......................... 4 fr. 50.

EN PRÉPARATION.

Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions. **Leçons sur les fonctions méromorphes**.

NOUVELLES LEÇONS SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS.

LEÇONS

SUR LES

SÉRIES A TERMES POSITIFS

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

ÉMILE BOREL.

RECUEILLIES ET RÉDIGÉES

PAR

ROBERT D'ADHÉMAR.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

PRÉFACE.

L'étude des séries à termes positifs, qui est l'objet de ces Leçons, est étroitement liée à la théorie de la croissance et, par là, se rattache à bien des problèmes de la plus grande importance en Analyse, et particulièrement dans la Théorie des fonctions. Il a déjà été question de plusieurs de ces problèmes dans mes Ouvrages antérieurs sur la Théorie des fonctions; comme je l'ai déjà indiqué, une théorie générale de la croissance devrait logiquement être l'introduction à toute étude d'Analyse; mais c'est seulement après avoir étudié séparément les diverses questions où la croissance intervient que l'on pourra tenter l'exposition complète de la théorie générale; les éléments de cette théorie sont esquissés dans le Chapitre III de ces Leçons.

Ce petit livre a été rédigé d'après vingt leçons que j'ai faites au Collège de France en 1900-1901 (¹). L'un de mes auditeurs, M. Robert d'Adhemar, avait bien voulu me proposer de travailler à cette rédaction.

Je tiens à le remercier très vivement de la peine qu'il a

(¹) Cours institué par la fondation Claude-Antoine Peccot.

prise, des soins qu'il y a donnés, et de la rapidité avec laquelle il l'a terminée.

Sur bien des points, il aurait été possible d'ajouter de nombreux compléments, car le sujet est extrêmement vaste; mais, en augmentant ainsi l'étendue de ces Leçons, je leur aurais sans doute enlevé la forme si vivante qu'a su leur donner M. d'Adhémar. J'ai préféré respecter sa rédaction et je suis convaincu que tous les lecteurs m'en sauront gré.

Paris, le 17 novembre 1901.

INDEX.

LEÇONS

SUR LES

SÉRIES A TERMES POSITIFS.

CHAPITRE I.

CONVERGENCE DES SÉRIES A TERMES CONSTANTS.

Généralités.

Il sera presque exclusivement question, dans cet Ouvrage, de séries à termes *positifs;* c'est dire que, lorsque nous parlerons de séries de puissances, non seulement les coefficients seront supposés positifs, mais aussi la ou les variables.

Les séries à termes tous positifs forment une classe très importante de séries qui peuvent être traitées par des méthodes spéciales. Quelques-uns des résultats établis, notamment ceux du Chapitre VI, ne s'étendraient certainement pas sans d'importantes modifications à des séries quelconques.

Nous ferons d'abord une étude des *critères de convergence* et nous verrons ce qu'il faut penser de leur *degré de généralité.*

L'on sait que l'on appelle critères *de première espèce* ceux qui ne font intervenir qu'*un* terme, un seul indice : tel est le critère de Cauchy relatif à

$$\sqrt[n]{u_n}.$$

L'on appelle critères *de seconde espèce* ceux qui font intervenir *deux* termes : tel est le critère de d'Alembert relatif à

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Ces critères se déduisent de critères de première espèce, nous les laisserons d'abord de côté comme étant moins généraux.

Il existe enfin des critères qui font intervenir une *infinité d'indéterminées,* par exemple le critère de Kummer, les critères de Paul du Bois-Reymond.

Nous les laisserons aussi de côté, non point que nous les jugions inutiles, mais parce que ces critères sont, à proprement parler, des *définitions transformées* de la convergence et de la divergence (1).

Nous nous occuperons donc exclusivement des critères de première espèce, voulant étudier les séries au point de vue des *modes de croissance.*

Il ne suffit pas de savoir *si une série converge* ou non, il est aussi important de savoir *avec quelle rapidité* elle converge, c'est-à-dire quel est l'ordre infinitésimal de l'infiniment petit

$$(S - S_n),$$

n étant infiniment grand, S représentant la somme de la série, S_n représentant la somme des n premiers termes.

Si la série diverge, il faut connaître le degré de l'infiniment grand

$$S_n,$$

lorsque n croît indéfiniment.

La rapidité de la convergence sera donc définie par le *degré de grandeur* (2) de

$$\frac{1}{S - S_n} \qquad (n = \infty),$$

---

(1) Le critère de Kummer repose sur la possibilité d'écrire :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{A_n}{A_{n+1} + 1}.$$

Le critère de Paul du Bois-Reymond repose sur la possibilité d'écrire :

$$u_{n+1} = M_{n+1} - M_n$$

(M_n n'augmentant pas indéfiniment avec n),
ou encore :

$$u_{n+1} = \frac{1}{M_n} - \frac{1}{M_{n+1}}$$

(M_n augmentant indéfiniment avec n).

(2) *Voir* Chapitre III.

et la rapidité de la divergence par celui de

$$S_n \quad (n = \infty).$$

Ainsi, après avoir donné les critères fondamentaux de Bertrand, après avoir comparé le problème des séries au problème des intégrales qui s'y rattache étroitement, nous étudierons la croissance des fonctions en introduisant une terminologie qui paraît devoir être commode. Cela nous amènera à la conception de la *fonction idéale* de Paul du Bois-Reymond.

Après une digression sur les séries à plusieurs indices, nous étudierons enfin, au point de vue de la croissance, les fonctions de *une* ou *plusieurs variables* représentées par des séries de puissances convergentes *partout* ou seulement dans un *certain domaine.*

Formation de critères de première espèce.

Les règles de Cauchy et d'Alembert ne sont, en somme, que le résultat de la comparaison d'une série avec une série convergente, la progression géométrique

$$\sum q^n, \quad q < 1.$$

Bertrand a donné (1) une infinité d'autres séries de comparaison que nous étudierons en partant d'un théorème de Cauchy.

Théorème. — *Soit une série à termes positifs et décroissants*

$$\sum u_n;$$

elle converge et diverge en même temps que la série

$$\sum v_n,$$

si l'on a posé

$$v_n = a^n u_{a^n} \quad (\text{avec } a > 1).$$

---

(1) *Journal de Liouville,* 1re série, t. VII; 1842.

En effet

$$u_{a^{p-1}+1}+u_{a^{p-1}+2}+\ldots+u_{a^p}>u_{a^p}(a^p-a^{p-1}),$$

puisque les termes décroissent.

Donc

$$a(u_{a^{p-1}+1}+\ldots+u_{a^p})>a^p(a-1)u_{a^p}\geqq a^p u_{a^p}.$$

Faisons $p=2, 3, \ldots, n$, et ajoutons membre à membre, il vient

$$u_1+au_a+a^2u_{a^2}+\ldots<u_1+a(u_a+u_{a+1}+u_{a+2}+\ldots).$$

Donc si $\sum u_n$ converge, il en est de même de $\sum v_n$.

D'autre part l'on peut écrire

$$a^p(a-1)u_{a^p}>u_{a^p}+u_{a^p+1}+\ldots+u_{a^{p+1}-1},$$

puisque les termes u_n décroissent constamment.

D'où

$$(a-1)(au_a+a^2u_{a^2}+\ldots)>u_a+u_{a+1}+u_{a+2}+\ldots.$$

Donc, si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ divergera. Le théorème de Cauchy est établi.

L'on pourrait supposer que a n'est pas entier (mais reste toujours >1); alors, en désignant par $E(x)$ le plus grand entier inférieur à x l'on aurait

$$v_n=a^n u_{E(a^n)},$$

ce que l'on peut bien écrire encore, *pour simplifier*,

$$v_n=a^n u_{a^n}.$$

Nous allons prendre $a=e$, en désignant, suivant l'usage, par e la base des logarithmes népériens.

Soient donc considérées la série $\sum u_n$

$$(S_1)\qquad 1+k+k^2+\ldots+k^n+\ldots$$

convergente pour $k<1$, divergente pour $k\geqq 1$, et la série $\sum v_n$

$$(\Sigma_1)\qquad 1+eu_e+e^2u_{e^2}+\ldots+e^nu_{e^n}+\ldots.$$

L'on a

$$(1) \qquad v_n = e^n k^{e^n} = e^n e^{\log k\, e^n}.$$

Si la série (S_1) converge, on a

$$\log k < 0.$$

Donc la série (Σ_1) converge bien plus vite. Pour avoir une série à convergence plus lente que (S_1), faisons l'inverse de ce qui précède.

Nous écrirons donc

$$v_n = k^n$$

et

$$v_n = e^n u_{e^n} = \nu u_\nu,$$

en posant

$$n = \log \nu.$$

Alors

$$\nu u_\nu = k^{\log \nu} = \nu^{\log k},$$

$$u_\nu = \frac{1}{\nu^{1-\log k}}.$$

Remplaçons ν par n et $\log k$ par $-\rho$, nous obtenons la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^{1+\rho}}$$

convergente pour $k < 1$ ou $\rho > 0$, divergente pour $k \geqq 1$ ou $\rho \leqq 0$. La convergence de la série

$$(S_2) \qquad \sum \frac{1}{n^{1+\rho}}, \quad \rho > 0$$

est d'ailleurs plus lente que la convergence de la série

$$(S_1) \qquad \sum k^n, \quad k < 1.$$

L'application du théorème de Cauchy va nous donner une série (S_3) qui converge encore plus lentement que (S_2). Écrivons, en effet,

$$v_n = \frac{1}{n^{1+\rho}}$$

et

$$v_n = e^n u_{e^n} = \nu u_\nu \qquad (n = \log \nu).$$

Nous en déduirons

$$u_\nu = \frac{1}{\nu(\log \nu)^{1+\rho}},$$

d'où la série cherchée, convergente pour $\rho > 0$, divergente pour $\rho \leqq 0$,

$$(S_3) \qquad \sum \frac{1}{n(\log n)^{1+\rho}}.$$

Posant

$$\log_\mu x = \log(\log_{\mu-1} x),$$
$$\log_1 x = \log x,$$
$$\log_0 x = x,$$

nous obtenons des séries telles que

$$(S_{\mu+2}) \qquad \sum \frac{1}{n \log n \log_2 n \ldots \log_{\mu-1} n (\log_\mu n)^{1+\rho}}.$$

Les séries S_2, S_3, ... *sont les séries de Bertrand. Pour* $\rho > 0$ *elles convergent et les convergences sont de plus en plus lentes.*

Pour $\rho \leqq 0$ *elles divergent et les divergences sont aussi de plus en plus lentes lorsque l'indice* μ *augmente.*

Cela résulte de la formule (1). L'on constate bien, d'ailleurs, que dans chaque série (S_μ) les termes vont en décroissant constamment.

Ces critères de Bertrand, qu'il obtenait d'ailleurs en partant d'un autre théorème de Cauchy, suffisent-ils pour reconnaître qu'une série donnée, à termes positifs, converge ou diverge?

La réponse à cette question fait l'objet d'un paragraphe suivant. Nous allons d'abord montrer, très rapidement, comment d'un *critère de première espèce* l'on peut déduire un *critère de seconde espèce* (moins général, d'après son mode de formation).

Formation de critères de seconde espèce.

Posons

$$\lambda_\mu(x) = x \log x \log_2 x \ldots \log_\mu x.$$

Le terme général de la série $(S_{\mu+2})$ s'écrira

$$u_n = \frac{1}{\lambda_\mu(n)(\log_\mu n)^\rho},$$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n-1}{n}\,\frac{\log(n-1)}{\log(n)}\,\frac{\log_2(n-1)}{\log_2(n)}\cdots\frac{[\log_\mu(n-1)]^{1+\rho}}{[\log_\mu(n)]^{1+\rho}}.$$

Étudions ce rapport

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n},$$

d'où

$$\log(n-1) = \log(n) + \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \log n + \left(-\frac{1}{n} + \frac{\theta}{n^2}\right)$$

avec $|\theta| < 1$

$$\log(n-1) = \log n\left(1 - \frac{1}{n\log n} + \frac{\theta'}{n^2}\right),$$

θ' étant une quantité *finie*.

Prenons les logarithmes des deux membres

$$\begin{aligned}\log_2(n-1) &= \log_2 n + \log\left(1 - \frac{1}{n\log n} + \frac{\theta'}{n^2}\right)\\ &= \log_2 n + \left(-\frac{1}{n\log n} + \frac{\theta''}{n^2}\right)\\ &= \log_2 n\left(1 - \frac{1}{n\log n\log_2 n} + \frac{\theta'''}{n^2}\right),\end{aligned}$$

θ'' et θ''' sont encore finis. L'on voit que l'on a, d'une manière générale,

$$\log_\mu(n-1) = \log_\mu n\left[1 - \frac{1}{\lambda_\mu(n)} + \frac{\theta}{n^2}\right],$$

θ est toujours *fini*. D'où

$$[\log_\mu(n-1)]^{1+\rho} = (\log_\mu n)^{1+\rho}\left[1 - \frac{1+\rho}{\lambda_\mu(n)} + \ldots\right],$$

et l'on peut écrire

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{u_n}{u_{n-1}} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left[1 - \frac{1}{\lambda_1(n)} + \frac{\theta_1}{n^2}\right]\left[1 - \frac{1}{\lambda_2(n)} + \frac{\theta^2}{n^2}\right]\cdots\\ &= 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{\lambda_1(n)} - \frac{1}{\lambda_2(n)} - \frac{1}{\lambda_3(n)} - \ldots.\end{aligned}\right.$$

D'où ce théorème :

Soit une série $\sum u_n$. *Si l'on a*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{\lambda_1(n)} - \ldots - \frac{1+\rho}{\lambda_\mu(n)},$$

ρ *étant plus petit que* o, *la série converge.*

En effet, si l'on a

$$\rho > 0$$

l'on peut trouver un nombre ρ' tel que

$$0 < \rho' < \rho$$

et tel que, pour n assez grand, l'on ait

$$(3) \qquad -\frac{1+\rho}{\lambda_\mu(n)} < -\frac{1+\rho'}{\lambda_\mu(n)} + \frac{\theta}{n^2},$$

θ étant $\gtrless 0$ et fini. Cette inégalité (3) revient, en effet, à celle-ci

$$\frac{\rho-\rho'}{\lambda_\mu(n)} > -\frac{\theta}{n^2},$$

ou encore à

$$\rho - \rho' > -\theta\frac{\lambda_\mu(n)}{n^2};$$

or le second membre tend vers *zéro* lorsque n croît indéfiniment.

L'on peut donc trouver $\rho' > 0$ et vérifiant la condition (3). Il suffit alors de regarder la formule (2) pour voir que le théorème annoncé est prouvé.

De même l'on démontre que si

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 - \frac{1}{n} - \ldots - \frac{1}{\lambda_\mu(n)},$$

la série diverge.

Il suffit, pour cela, de prendre un nombre θ tel que l'on ait

$$\frac{-1}{\lambda_{\mu+1}(n)} + \frac{\theta}{n^2} < 0;$$

il en résultera

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \left[1 - \frac{1}{n} - \ldots - \frac{1}{\lambda_\mu(n)}\right] - \frac{1}{\lambda_{\mu+1}(n)} + \frac{\theta}{n^2}$$

et la formule (2) prouve alors la divergence.

Tel est le critère de seconde espèce que nous voulions former.

Étude des critères de Bertrand.

Nous allons maintenant étudier d'une manière plus approfondie les critères de Bertrand.

Il est, tout d'abord, nécessaire d'introduire la notion de *la plus grande des limites* d'une suite infinie de nombres réels

$$(\alpha) \qquad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_m, \quad \ldots.$$

Écartons le cas où la suite (α) contient des termes supérieurs à tout nombre donné ou croissant indéfiniment par valeurs négatives, sauf à y revenir bientôt [1].

Les nombres réels forment, par rapport à la suite (α), *deux* catégories :

Un nombre A_s appartient à la *classe supérieure* s'il n'existe qu'un nombre *fini* de termes α_m qui soient supérieurs à A_s;

Un nombre A_i appartient à la *classe inférieure* si la suite contient des termes de rang aussi élevé que l'on veut qui soient supérieurs à A_i.

L'on voit que tout nombre plus grand que A_s est de la classe supérieure et que tout nombre inférieur à A_i est de la classe inférieure.

Dans ces conditions, l'on sait que les deux classes sont *séparées* par un nombre L tel que $(L + \varepsilon)$ appartienne à la classe supérieure et $(L - \varepsilon)$ à la classe inférieure, ε étant aussi petit que l'on voudra.

A ce nombre L, Cauchy, Paul du Bois-Reymond et M. Hada-

---

[1] Consulter sur ce sujet la *Thèse* de M. Hadamard (*Journal de Mathématiques*, 1892).

mard ont donné des noms différents. Nous l'appellerons, avec Cauchy, *la plus grande des limites* de la suite (α).

Considérons la suite

$$(\alpha') \qquad -\alpha_1, \quad -\alpha_2, \quad \ldots, \quad -\alpha_m, \quad \ldots.$$

La plus grande des limites de la suite (α'), changée de signe, sera dite *la plus petite des limites* de la suite (α).

Si (α) contient des termes croissant indéfiniment par valeurs positives, l'une des classes disparaît :

$$L = +\infty.$$

Si les termes vont tous en augmentant par valeurs négatives, une classe disparaît encore :

$$L = -\infty.$$

L'on peut évidemment, dans (α), détacher une suite de termes qui aura L pour *limite absolue,* pour limite au sens ordinaire de ce mot.

Si, pour m assez grand, *tous* les α_m s'approchent indéfiniment de L, ce nombre devient une *limite absolue* et l'on peut dire que les α_m *tendent régulièrement vers* L.

Prenons un exemple. Soit

$$\alpha_m = 2 + \frac{(-1)^m}{m} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } m = \text{mult. } 4 \\ \text{et } \quad m = \text{mult. } 4 + 1, \end{array} \right.$$

$$\alpha_m = 1 + \frac{(-1)^m}{m} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } m = \text{mult. } 4 + 2 \\ \text{et } \quad m = \text{mult. } 4 + 3. \end{array} \right.$$

La plus grande des limites est 2, $L = 2$.

La plus petite des limites est 1, $l = 1$.

Et c'est parce qu'une suite, comme celle-ci, contient des termes *supérieurs* à L et des termes inférieurs à l, que nous préférons l'expression de Cauchy « *plus grande des limites* » à celle de M. Hadamard : « *limite supérieure pour m infini* » et à celle de Paul du Bois-Reymond : « *limite supérieure d'indétermination* ».

Cette notion étant acquise, l'on cherchera à comparer une série donnée $\sum u_n$ à une série de Bertrand en écrivant

$$u_n = \frac{1}{\lambda_\mu(x)(\log_\mu x)^{\rho_n}}$$

et en étudiant la suite des nombres

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \rho_3, \quad \ldots, \quad \rho_n, \quad \ldots.$$

Soit ρ' la plus grande des limites et ρ'' la plus petite des limites. Plusieurs cas peuvent se présenter.

Premier cas :

$$0 < \rho'' \leqq \rho'.$$

Nous n'avons qu'un nombre *fini* d'indices m tels que

$$\rho_m < \rho'' - \varepsilon \qquad (\rho'' - \varepsilon > 0).$$

La série donnée *converge* donc comme une série de Bertrand dans laquelle ρ est positif.

Deuxième cas :

$$\rho'' \leqq \rho' < 0.$$

Il n'y a qu'un nombre *fini* d'indices m tels que

$$\rho_m > \rho' + \varepsilon \qquad (\rho' + \varepsilon < 0).$$

Donc la série donnée *diverge* comme une série de Bertrand dans laquelle on a

$$\rho \leqq 0.$$

Troisième cas :

$$\rho'' < 0 < \rho'.$$

Alors *une partie* de la série est comparable à une série convergente, *une seconde partie* étant comparable à une série divergente.

Si d'ailleurs l'on prend une série $S_{\mu+2}$ dont l'indice soit plus élevé, ρ'' tend vers $-\infty$ et ρ' vers $+\infty$. Donc les critères sont *inapplicables*.

Quatrième cas :

$$\rho'' = \rho' = 0.$$

La méthode de comparaison avec la série $S_{\mu+2}$ est *en défaut*.

Nous omettrons la discussion, très aisée d'ailleurs, des autres cas qui peuvent se présenter relativement à la situation respective des trois nombres

$$0, \quad \rho', \quad \rho'';$$

nous avons, en effet, rencontré les cas intéressants, celui où le critère $S_{\mu+2}$ est *inapplicable,* et le cas où il est *en défaut,* cas bien différents d'ailleurs.

Si, en effet, le critère $S_{\mu+2}$ est *inapplicable,* il en va de même des critères d'indice plus grand. Mais si le critère $S_{\mu+2}$ est *en défaut,* l'on pourra espérer que *tous* les critères d'indice plus grand ne le seront pas. Bertrand écartait, comme « *infiniment peu probable* », le cas où *tous* ses critères seraient *en défaut.*

Ce cas peut cependant se présenter, comme l'a montré Paul du Bois-Reymond, comme nous allons le voir d'après lui.

Théorèmes de Paul du Bois-Reymond.

Faisons $\rho = 0$ dans les séries de Bertrand, nous avons les séries *divergentes*

$$(\sigma_0) \qquad \sum \frac{1}{n},$$

$$(\sigma_1) \qquad \sum \frac{1}{\lambda_1(n)},$$

$$(\sigma_2) \qquad \sum \frac{1}{\lambda_2(n)},$$

....

Ces séries divergent de plus en plus *lentement.*

Nous allons *former* une série

$$\sum U_n$$

divergente, mais plus lentement que la série σ_q, quelque grand que soit l'indice q.

Pour cela, donnons-nous une série *divergente* quelconque

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_m + \ldots.$$

Prenons dans la série σ_0 un nombre n_1 de termes suffisants pour que l'on ait

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n_1} > \varepsilon_1,$$

puis, dans la série σ_1 un nombre $(n_2 - n_1)$, de termes assez grands

pour vérifier l'inégalité

$$\frac{1}{\lambda_1(n_1+1)}+\frac{1}{\lambda_1(n_1+2)}+\ldots+\frac{1}{\lambda_1(n_2)}>\varepsilon_2,$$

et, en général, dans la série σ_q $(n_{q+1}-n_q)$ termes de manière que

$$\frac{1}{\lambda_q(n_q+1)}+\ldots+\frac{1}{\lambda_q(n_{q+1})}>\varepsilon_q.$$

Avec ces groupes de termes pris dans les séries σ_i nous formons une série $\sum U_n$ qui diverge, puisque la série de ε diverge, et qui diverge moins vite que la série σ_q. Soit, en effet, V_n le terme général de σ_q, l'on a

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{U_n}{V_n}\right)=0.$$

Il suffit, pour le montrer, de voir que n augmentant indéfiniment est supérieur à n_{q+1}. Par suite,

$$U_n=\frac{1}{\lambda_{q'}(n)},\qquad q'>q,$$

tandis que

$$V_n=\frac{1}{\lambda_q(n)}.$$

Donc, le rapport

$$\frac{U_n}{V_n}=\frac{\lambda_q(n)}{\lambda_{q'}(n)}$$

est inférieur à

$$\frac{1}{\log_{q+1}(n)}.$$

Il tend vers *zéro* lorsque n tend vers l'*infini*.

Nous avons donc une série $\sum U_n$ qui diverge plus lentement qu'une série quelconque σ_q.

Faisons maintenant $\rho=1$ dans les séries de Bertrand, nous avons des séries à *convergence* de plus en plus *lente :*

(s_0) $$\sum\frac{1}{n^2};$$

(s_1) $$\sum\frac{1}{\lambda_1(n)\log(n)};$$

(s_2) $$\sum\frac{1}{\lambda_2(n)\log_2(n)};$$

....

Nous allons *former* une série $\sum u_n$ qui converge plus lentement qu'une série s_q, quelque grand que soit l'indice q.

Il suffit, pour cela, de se donner une série convergente quelconque

$$\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_m + \ldots,$$

et de prendre des groupes de termes dans les séries s_i, de manière que la somme du groupe soit inférieure à η_i.

Si l'on appelle v_n le terme général de la série s_q, l'on a, dans ces conditions,

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \infty.$$

Nous allons maintenant établir, relativement aux séries $\sum U_n$, $\sum u_n$, le théorème suivant :

Pour ces séries les critères logarithmiques sont toujours en défaut.

L'on a, en effet,

$$U_n = \frac{1}{\lambda_q(n)};$$

l'indice q restant le même pour

$$n_q + 1 \leqq n \leqq n_{q+1}.$$

La comparaison se fait en écrivant

$$U_n = \frac{1}{\lambda_\mu(n)[\log_\mu(n)]^{\rho_n}},$$

d'où

$$\rho_n = \frac{\log\frac{1}{U_n} - \log n - \log_2 n - \ldots - \log_\mu n}{\log_\mu n}.$$

Ici l'on a donc

$$\rho_n = \frac{\log n + \log_2 n + \ldots + \log_{q+1} n - \log n - \ldots - \log_\mu n}{\log_\mu n}$$
$$= \frac{\log_{\mu+1} n + \log_{\mu+2} n + \ldots + \log_{q+1} n}{\log_\mu n}.$$

Quel que soit μ, l'on voit que ρ_n tend vers la *limite absolue zéro* pour $n = \infty$.

Il n'y a, pour ainsi dire, rien à changer à ceci pour montrer le même résultat relativement à la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\lambda_q(n)\log_q(n)}.$$

Ici encore

$$\lim_{n=\infty}(\rho_n) = 0.$$

En résumé, nous avons obtenu des séries pour lesquelles les critères de Bertrand sont toujours applicables et toujours en défaut.

Paul du Bois-Reymond (¹) a, le premier, donné de tels exemples.

Nous aurons à revenir, d'ailleurs, sur les travaux de Paul du Bois-Reymond sur les fonctions croissantes. Terminons ce paragraphe par la démonstration de deux théorèmes qui sont une généralisation des résultats de Paul du Bois-Reymond et qui sont dus à M. Hadamard (²).

Théorème. — *Étant donnée une fonction* indéfiniment croissante *quelconque* $\varphi(n)$, *l'on peut trouver :*

1° *Une série* convergente $\sum u_n$;

2° *Une série* divergente $\sum U_n$, *telles que l'on ait*

$$\frac{u_n}{U_n} < \varphi(n).$$

Soit, en effet, une série de nombres M_n croissant indéfiniment avec l'indice n, par exemple,

$$M_{n+1} = \sqrt{\varphi(n)},$$
$$M_n \;\; = \sqrt{\varphi(n-1)}.$$

La série $\sum(M_{n+1} - M_n)$ *diverge* et la série $\sum\left(\frac{1}{M_n} + \frac{1}{M_{n+1}}\right)$

(¹) *Journal de Crelle*, t. 76. — *Voir* aussi Pringsheim, *Mathematische Annalen*, t. XXXV. — Dini, *Ann. dell' Univ. Tosc.*; 1867.

(²) *Acta Mathematica*, t. XVIII.

converge, le rapport des termes de même rang étant

$$M_n M_{n+1} < \varphi(n);$$

c'est ce que nous devions établir.

L'on peut encore énoncer ce théorème :

Théorème. — Quelque lente *que soit la* divergence *d'une série, l'on peut multiplier ses termes par des quantités* indéfiniment décroissantes, *de façon à former une série encore divergente.*

Quelque lente *que soit la* convergence, *l'on peut multiplier les termes par des quantités* indéfiniment croissantes *sans troubler la convergence.*

Soient, en effet, $\sum U_n$ la série divergente et S_n la somme des n premiers termes,

$$U_n = S_{n+1} - S_n.$$

La quantité $\frac{1}{\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}}$ est infiniment petite pour n très grand.

Or, la série de terme général

$$V_n = \frac{U_n}{\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}} = (\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$$

est bien encore divergente.

De même, soit la série convergente $\sum u_n$ et soit R_n le reste,

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots.$$

L'on a

$$u_n = R_{n-1} - R_n.$$

La quantité $\frac{1}{\sqrt{R_{n-1}}+\sqrt{R_n}}$ croît indéfiniment avec n. Or la série de terme général

$$v_n = \frac{u_n}{\sqrt{R_{n-1}}+\sqrt{R_n}} = (\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n})$$

est bien convergente.

CONCLUSION. — Ce qui précède se rattache étroitement à des considérations que l'on trouvera développées plus loin. Mais, dès maintenant, nous devons répondre à cette question ; *Que valent, en somme, les critères logarithmiques?*

« Beaucoup de géomètres [1], parmi lesquels on peut citer O. Bonnet, ont omis de considérer les cas où ces critères sont *inapplicables....* Il n'est pas douteux que ces cas n'existent, et il est très aisé d'en *fabriquer;* ce qui est moins aisé, c'est d'en fournir des exemples *réels,* c'est-à-dire s'étant présentés naturellement. De plus, dans tous les cas indiqués jusqu'ici à ma connaissance, où ces critères sont *inapplicables*, la série proposée se décompose naturellement en plusieurs séries partielles, à chacune desquelles ils sont applicables. »

D'autre part, Paul du Bois-Reymond a formé une série pour laquelle les critères logarithmiques sont *tous en défaut, jamais inapplicables.*

Mais, poursuit M. Borel, « le sens de la réalité ne l'abandonne pas au milieu de ces spéculations et il s'inquiète de l'approximation que peut fournir la série qu'il vient de former. Le résultat de son calcul est le suivant : pour atteindre la *moitié* de la somme totale, il faut prendre un nombre de termes égal au *volume de la terre* exprimé en *millimètres cubes* ».

Nous pouvons conclure, d'après cela :

Les critères de Bertrand *suffisent*, non pas à un point de vue ABSOLU, mais ils suffisent au moins dans l'état actuel de la Science.

Conditions nécessaires de convergence.

Soit d'abord une série *à termes positifs* $\sum u_n$ sur laquelle on ne fait aucune autre hypothèse.

Existe-t-il une condition NÉCESSAIRE *de convergence, de la forme*

$$\lim_{n=\infty} [\varphi(n) u_n] = 0,$$

$\varphi(n)$ ayant pour plus grande limite $+\infty$?

---

(1) BOREL, *Mémoire sur les series divergentes* (*Annales de l'École Normale;* 1899).

Choisissons des entiers n_1, n_2, ... par les conditions suivantes

$$\frac{1}{\varphi(n_1)} < \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{\varphi(n_2)} < \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{1}{\varphi(n_q)} < \left(\frac{1}{2}\right)^q.$$

Remplaçons, dans la série donnée, u_{n_1} par $\frac{1}{\varphi(n_1)}$, u_{n_2} par $\frac{1}{\varphi(n_2)}$, ... La convergence de la série donnée n'est pas troublée et l'on a, pour une infinité de valeurs de N, savoir

$$N = n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_q,\ \ldots,$$
$$\varphi(N) u_N = 1.$$

L'on voit par là que *pour une série quelconque il ne saurait y avoir d'autre* condition nécessaire *que la condition*

$$\lim_{n=\infty} (u_n) = 0.$$

La réponse à la question posée est négative.

Nous allons montrer que, si l'on suppose les termes de la série non croissants ([1]), il y a une condition NÉCESSAIRE, savoir

$$\lim_{n=\infty} (n u_n) = 0, \tag{1}$$

mais qu'il n'existe pas de condition nécessaire de la forme

$$\lim_{n=\infty} [n\,\varphi(n) u_n] = 0, \tag{2}$$

$\varphi(n)$ étant une fonction dont la plus grande des limites est $+\infty$.

1° Si l'on n'a pas (1), alors il existe une infinité de nombres n_q tels que

$$n_q u_{n_q} > \alpha > 0.$$

Nous pouvons supposer que l'on a

$$n_2 > 2n_1, \quad \ldots, \quad n_{q+1} > 2n_q, \quad \ldots.$$

([1]) Cette proposition est due à M. Pringsheim.

D'ailleurs les termes de la série donnée $\sum u_n$ décroissent, d'où

$$u_{n_q+1} + u_{n_q+2} + \ldots + u_{n_{q+1}} \geqq (n_{q+1} - n_q)\, u_{n_{q+1}} \geqq \frac{n_{q+1}\, u_{n_{q+1}}}{2}.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n > \mathrm{K} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \ldots;$$

α étant un nombre fixe, la somme serait infinie. Il y a contradiction avec l'hypothèse de la convergence. Donc la condition (1) *doit être remplie.*

2° Pour examiner la nécessité d'une condition (2), choisissons des entiers n_1, n_2, n_3, ... par la condition

$$\frac{1}{\varphi(n_1)} < \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{\varphi(n_2)} < \left(\frac{1}{2}\right)^2, \qquad \ldots;$$

soient alors

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_{n_1} = \frac{1}{\varphi(n_1)},$$

$$u_{n_1+1} = u_{n_1+2} = \ldots = u_{n_2} = \frac{1}{\varphi(n_2)},$$

....

La série ainsi formée est formée de termes non croissants. Elle converge comme

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^q$$

et l'on a, pour une infinité de valeurs de N,

$$\mathrm{N}\,\varphi(\mathrm{N})\,u_{\mathrm{N}} = 1.$$

La condition (1) est bien la seule condition nécessaire pour des séries à termes non croissants.

Conclusion. — On voit combien les idées ont été mûries depuis que Lagrange écrivait en 1770 [1] : « Pour qu'une série puisse être regardée

---

[1] *Mémoires de Berlin* (*Œuvres*, t. III, p. 61).

comme représentant réellement la valeur d'une quantité cherchée *il faut* qu'elle soit *convergente* à son extrémité, *c'est-à-dire que ses derniers termes soient infiniment petits,* de sorte que l'erreur puisse devenir moindre qu'aucune quantité donnée. »

Abel (¹), d'ailleurs, avait donné le théorème relatif à nu_n pour les séries à termes décroissants, théorème qui a été ici complété (²).

(¹) ABEL, *Œuvres complètes.*

(²) Pour tout ce qui concerne les séries, *voir* l'article de M. Pringsheim dans *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* Leipzig, Teubner.

CHAPITRE II.

CONVERGENCE DES INTÉGRALES.

Généralités.

Soit une intégrale dont l'élément différentiel devient infini pour une valeur de x qui, par un changement de variable, pourra être supposée $x = +\infty$.

L'intégrale peut, ou non, *avoir un sens*.

Par exemple

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}$$

a un sens.

Considérons la courbe

$$(1) \qquad y = \frac{1}{x^2},$$

l'ordonnée décroît régulièrement et tend vers *zéro*. Considérons, en même temps, la courbe

$$(2) \qquad y = e^x$$

dont l'ordonnée croît constamment.

Formons maintenant une courbe

$$y = \mathrm{F}(x)$$

qui, lorsque x est compris entre deux entiers consécutifs n et $n+1$, se confondra avec la courbe (1), mais, pour $x = n$, rejoindra la courbe (2) par une ascension et une descente *continues,* mais très rapides, et comprises entre les abscisses

$$n - \frac{\varepsilon_n}{2}, \qquad n + \frac{\varepsilon_n}{2}.$$

On aura

$$\int_a^{+\infty} \mathrm{F}(x)\,dx < \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} + \varepsilon_p e^p + \varepsilon_{p+1} e^{p+1} + \ldots.$$

comme représentant réellement la valeur d'une quantité cherchée *il faut* qu'elle soit *convergente* à son extrémité, *c'est-à-dire que ses derniers termes soient infiniment petits,* de sorte que l'erreur puisse devenir moindre qu'aucune quantité donnée. »

Abel [1], d'ailleurs, avait donné le théorème relatif à nu_n pour les séries à termes décroissants, théorème qui a été ici complété [2].

---

(1) ABEL, *Œuvres complètes.*

(2) Pour tout ce qui concerne les séries, *voir* l'article de M. Pringsheim dans *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* Leipzig, Teubner.

CHAPITRE II.

CONVERGENCE DES INTÉGRALES.

Généralités.

Soit une intégrale dont l'élément différentiel devient infini pour une valeur de x qui, par un changement de variable, pourra être supposée $x = +\infty$.

L'intégrale peut, ou non, *avoir un sens.*

Par exemple

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2}$$

a un sens.

Considérons la courbe

$$(1) \qquad y = \frac{1}{x^2},$$

l'ordonnée décroît régulièrement et tend vers *zéro*. Considérons, en même temps, la courbe

$$(2) \qquad y = e^x$$

dont l'ordonnée croît constamment.

Formons maintenant une courbe

$$y = F(x)$$

qui, lorsque x est compris entre deux entiers consécutifs n et $n+1$, se confondra avec la courbe (1), mais, pour $x = n$, rejoindra la courbe (2) par une ascension et une descente *continues,* mais très rapides, et comprises entre les abscisses

$$n - \frac{\varepsilon_n}{2}, \qquad n + \frac{\varepsilon_n}{2}.$$

On aura

$$\int_a^{+\infty} F(x)\,dx < \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} + \varepsilon_p e^p + \varepsilon_{p+1} e^{p+1} + \ldots.$$

Les ε étant bien choisis, l'intégrale du premier membre aura un sens.

On voit, en examinant ce cas particulier, que si la fonction sous le signe est *tout à fait quelconque, l'on ne peut pas espérer* de former une *condition nécessaire de convergence* de la forme

$$F(x) < \psi(x).$$

Il n'en est plus de même, si nous faisons une hypothèse sur l'allure de la fonction.

Intégrale d'une fonction décroissante.

Supposons la fonction $f(x)$ décroissante et que, pour une infinité de valeurs

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots,$$

le produit $x\,f(x)$ reste supérieur à un nombre fini A.

Nous prendrons

$$x_2 > 2x_1, \qquad x_3 > 2x_2, \qquad \ldots.$$

On aura

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx > \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x_n)\,dx > (x_n - x_{n-1})\frac{A}{x_n} > \frac{A}{2}.$$

Il ne saurait y avoir convergence pour $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, d'où :

Théorème. — *Pour une intégrale de fonction décroissante, il existe une condition* nécessaire *de convergence,* savoir

$$\lim_{x=\infty} [x\,f(x)] = 0.$$

Il faut donc, comme pour les séries, rechercher des règles de convergence assez compréhensives pour être, ici encore, *relativement* suffisantes.

C'est ce que nous allons faire.

Critères de Bertrand, de M. Ermakoff.

Nous ferons d'abord une remarque relative à l'ensemble des

intégrales convergentes. Soient deux telles intégrales, absolument quelconques par ailleurs,

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx, \qquad \int_{x_0}^{+\infty} g(x)\,dx.$$

On peut écrire

$$(1) \qquad \int_{x}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{y}^{\infty} g(x)\,dx,$$

ce qui définit une fonction croissante

$$(2) \qquad y = G(x).$$

Ainsi, *toutes les intégrales convergentes se ramènent à l'une d'elles par un changement de variable qui met en jeu une fonction croissante.*

Ceci ne donne point de critères; mais un changement de variable, tel que (2), nous fixe sur la rapidité de la convergence d'une intégrale. Soit, en effet,

$$\int_{x}^{\infty} f(x)\,dx = \varphi(x).$$

Lorsque x est très grand, φ peut s'appeler le *reste,* car

$$\lim_{x=\infty} [\varphi(x)] = 0.$$

La relation (2) peut d'ailleurs s'écrire

$$(2') \qquad x = F(y),$$

F étant encore une fonction croissante.

D'où

$$\int_{x}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{G(x)}^{\infty} f[F(y)]\,F'(y)\,dy = \int_{y}^{\infty} g(y)\,dy.$$

Écrivons

$$\int_{y}^{\infty} g(y)\,dy = \Phi(y) = \varphi(x).$$

On a

D'où

$$\Phi(y) = \varphi[F(y)].$$

L'intégrale *converge rapidement,* si le reste $\Phi(y)$ tend rapi-

dement vers *zéro,* c'est-à-dire si la fonction $F(y)$ est *rapidement croissante;* l'intégrale *converge lentement,* si $F(y)$ *croît lentement.*

De même toutes les intégrales divergentes se ramènent théoriquement à l'une d'elles.

Prenons donc l'intégrale

$$\int^{+\infty} \frac{dx}{x^{1+\rho}} \quad \begin{cases} \text{convergente pour } \rho > 0 \\ \text{divergente pour } \rho \leqq 0 \end{cases}$$

et faisons

$$x = \log_{\mu}(y), \qquad dx = \frac{dy}{\lambda_{\mu-1}(y)},$$

nous obtenons ainsi toutes les *intégrales de comparaison* de Bertrand

$$\int^{+\infty} \frac{dy}{\lambda_{\mu}(y)[\log_{\mu}(y)]^{\rho}},$$

convergentes pour $\rho > 0$, *divergentes* pour $\rho \leqq 0$ et dont on peut dire encore qu'elles sont relativement suffisantes.

On doit encore à M. Ermakoff une règle d'un emploi commode. Écrivons

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \theta(x) - \theta(x_0)$$

et faisons

$$x = e^y,$$

d'où l'intégrale

$$\int_{\log x_0}^{\log x} f(e^y)e^y\,dy.$$

Supposons que, pour x très grand, pour $x > \log x_0$, l'on ait

$$e^x f(e^x) < k f(x) \qquad (k < 1).$$

Nous en tirons

$$\int_{\log x_0}^{\log x} f(e^y)e^y\,dy < k\int_{\log x_0}^{\log x} f(x)\,dx < k[\theta(\log x) - \theta(\log x_0)].$$

Rapprochant les membres extrêmes

$$\theta(x) - \theta(x_0) < k\theta(\log x) - k\theta(\log x_0),$$
$$\theta(x) < k\theta(\log x) + \alpha \qquad (\alpha \text{ fini}).$$

Changeons x en e^x

$$\theta(e^x) < k\theta(x) + \alpha < k[k\theta(\log x) + \alpha] + \alpha < k^2\theta(\log x) + \alpha(k+1).$$

De même

$$\theta(e^{e^x}) < k^3\theta(\log x) + \alpha(k^2 + k + 1)$$

et enfin

$$\theta\left\{e^{e^{\cdot^{\cdot^{e^x}}}}\right\} < k^n\theta(\log x) + \alpha(k^{n-1} + k^{n-2} + \ldots + k + 1).$$

Lorsque le nombre n des exposants superposés devient *infini* le deuxième membre a pour limite

$$\frac{\alpha}{1-k},$$

d'où la règle [1] :

Si, pour x très grand, on a constamment

$$e^x f(e^x) < kf(x) \qquad (k < 1),$$

l'intégrale converge.

On verrait de même que *si, pour x très grand, on a constamment*

$$e^x f(e^x) > kf(x) \qquad (k > 1),$$

l'intégrale $\int^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Théorème de Paul du Bois-Reymond.

Nous avons vu que l'on peut toujours former une série qui converge plus lentement qu'une série convergente donnée ou qui diverge plus lentement qu'une série divergente donnée.

Il en est absolument de même pour les intégrales. Toutes les intégrales convergentes, nous l'avons vu, se ramènent à l'une d'elles par un changement de variable

$$y = F(x),$$

F étant une fonction croissante. Il en est de même pour les intégrales divergentes.

(1) Ermakoff, *Bulletin des Sciences mathématiques*, années 1871 et 1883.

Il nous suffit donc, pour démontrer l'identité des deux problèmes (séries et intégrales), de donner le théorème suivant, dû à Paul du Bois-Reymond :

THÉORÈME. — *Soit un ensemble dénombrable de fonctions positives croissant de plus en plus rapidement*

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x), \quad \ldots;$$

il existe une fonction $\Phi(x)$ *qui croît encore plus vite.*

Nous supposons que φ_{n+1} croît plus vite que φ_n, c'est-à-dire que $\varphi_{n+1} : \varphi$ augmente indéfiniment avec x. Mais φ_{n+1} n'est pas supérieur à φ_n pour toute valeur de x; nous allons donc tout d'abord chercher un ensemble dénombrable de fonctions

$$\psi_1(x), \quad \ldots, \quad \psi_n(x) \quad \ldots,$$

jouissant de cette dernière propriété.

Il suffira de prendre

$$\left.\begin{array}{l}\psi_n(x) \geqq \varphi_n(x),\\ \psi_n(x) \geqq \psi_{n-k}(x)\end{array}\right\} \text{quel que soit } x.$$

Montrons que c'est bien, en effet, possible.

Supposons que nous ayons obtenu ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n et cherchons à obtenir ψ_{n+1}.

Pour x assez grand, ψ_n et φ_n *coïncident;* donc, pour x assez grand, l'on a

$$\varphi_{n+1} > \psi_n.$$

Nous prendrons donc, *pour chaque valeur de x,* la valeur de ψ_{n+1} égale à la plus grande des valeurs de $\varphi_{n+1}(x)$ et de $\psi_n(x)$.

Cela fait, nous définirons $\Phi(x)$ ainsi : pour $x = n$ (entier)

$$\Phi(n) = \psi_n(n);$$

entre deux entiers consécutifs nous ferons une interpolation linéaire ou très voisine de celle-là si l'on veut une fonction Φ continue.

La fonction Φ répond à la question proposée, car elle est croissante et l'on a, pour $x > m + 1$,

$$\frac{\psi(x)}{\varphi_m(x)} > \frac{\psi_{m+1}(x)}{\varphi_m(x)},$$

ce dernier rapport croissant indéfiniment, puisque, pour x assez grand, il coïncide avec

$$\frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_m(x)}.$$

Le théorème de Paul du Bois-Reymond est établi.

Remarque. — Ce théorème peut être complété, à un certain point de vue, par une remarque de M. H. Poincaré (¹) :

Étant donnée une fonction croissante $\Phi(x)$, *on peut toujours trouver une fonction* entière $E(x)$ *telle que l'on ait*

$$E(x) > \Phi(x).$$

Soit, en effet, une fonction croissante Φ et prenons un ensemble dénombrable de nombres croissants $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ (par exemple $a_n = n$). On aura

$$\Phi(a_1) < \Phi(a_2) < \ldots < \Phi(a_n) < \ldots.$$

Considérons un deuxième ensemble dénombrable de nombres b_n défini par

$$a_1 < b_2 < a_2 < b_3 < a_3 \ldots < b_n < a_n < \ldots$$

et posons

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{M_n}.$$

On a

$$E(a_n) = \sum_{1}^{n} \left(\frac{a_n}{b_h}\right)^{M_h} + \sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_k}\right)^{M_k}.$$

Il suffit de choisir M_n tel que

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{M_n} > \Phi(a_n),$$

$$\left(\frac{a_n}{b_{n+1}}\right)^{M_n} < \varepsilon.$$

(¹) Voir *American Journal*, t. XIII.

Cela est possible, puisque

$$\frac{a_n}{b_n} > 1 > \frac{a_n}{b_{u+1}},$$

et la fonction entière est obtenue.

Le théorème de Paul du Bois-Reymond nous montre clairement que les croissances ne se mesurent pas comme les grandeurs auxquelles s'applique l'axiome d'Archimède.

Il n'existe pas d'*échelle des croissances* telle que

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n, \quad \ldots.$$

Il n'existe pas davantage d'échelle telle que

$$\begin{array}{lllll}
\varphi_{1,1}, & \varphi_{1,2}, & \ldots, & \varphi_{1,n}, & \ldots, \\
\varphi_{2,1}, & \varphi_{2,2}, & \ldots, & \varphi_{2,n}, & \ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
\varphi_{p,1}, & \varphi_{p,2}, & \ldots, & \varphi_{p,n}, & \ldots, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots,
\end{array}$$

puisqu'un ensemble dénombrable d'ensembles dénombrables est lui-même un ensemble dénombrable ([1]).

On ne conçoit une *échelle absolue* qu'autant que l'on conçoit le TRANSFINI.

En un mot, grâce au théorème précédent, on voit bien clairement ce que sont les critères de convergence des séries et des intégrales, critères de comparaison infiniment précieux, puisqu'ils atteignent les modes de croissance que les géomètres rencontrent naturellement, mais critères forcément insuffisants au point de vue de l'absolu.

Poursuivons notre comparaison des séries et des intégrales. Les termes successifs d'une série peuvent être regardés comme étant les ordonnées relatives à une fonction définie seulement pour les valeurs entières de la variable. Au contraire, une intégrale met en jeu une courbe qui a une ordonnée (ou *deux* au plus en certains

---

([1]) *Voir* E. BOREL, *Leçons sur la Théorie des Fonctions*; Gauthier-Villars, 1898; en particulier la *Note* II à la fin de l'Ouvrage.

points) pour chaque valeur de la variable. Cette image géométrique donne précisément un théorème de Cauchy :

Suivant que l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

a, ou non, un sens, la série

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+\ldots$$

converge ou diverge (¹).

Les relations entre séries et intégrales, regardées de ce point de vue, nous amènent à étudier les relations entre les types de croissance continus et discontinus.

Types continus et types discontinus de croissance.

Est-on suffisamment renseigné sur l'allure d'une fonction $f(x)$ lorsque l'on connaît

$$f(n),\quad f(n+1),\quad f(n+2),\quad \ldots ?$$

1° Supposons

$$f(n)=e^n;$$

alors

$$f(n+1)-f(n)=e^n(e-1)=f'(n+\theta).$$

Si nous savons, en plus, que la dérivée est croissante, nous pouvons écrire

$$e^{n-1}(e-1)<f'(n)<e^n(e-1);$$

posant

$$\frac{e-1}{e}=1-\alpha,\qquad e-1=1+\beta,$$

il vient

$$e^n(1-\alpha)<f'(n)<e^n(1+\beta),$$

c'est-à-dire que la dérivée, pour $x=n$, est voisine de e^n.

(¹) *Voir*, par exemple, PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, 2ᵉ édition, p. 39.

Les différences successives donnent de même des limites assez resserrées pour les dérivées successives

$$f'(n), \quad f''(n), \quad \ldots.$$

On voit que, dans ce cas, les ordonnées correspondant aux abscisses entières suffisent à *suivre la fonction* pour des abscisses quelconques, *avec une certaine approximation.*

2° Nous allons montrer que, pour des fonctions beaucoup plus croissantes, les ordonnées entières ne renseignent plus suffisamment sur la marche de la fonction.

Posons

$$\varphi_m(x) = e_1^{e_2^{e_3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e_m^x}}}}}}$$

(nous mettons ces indices pour faciliter la lecture, mais nous supposons toujours

$$e_1 = e_2 = e_3 = \ldots = e_m = e)$$

et formons la fonction *entière, très rapidement croissante*

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x)}{\varphi_m(m)}.$$

Proposons-nous de trouver des inégalités relatives à $\psi(m)$.

$$\psi(m) = \frac{\varphi_1(m)}{\varphi_1(1)} + \frac{\varphi_2(m)}{\varphi_2(2)} + \ldots + \frac{\varphi_{m-1}(m)}{\varphi_{m-1}(m-1)} + 1$$
$$+ \frac{\varphi_{m+1}(m)}{\varphi_{m+1}(m+1)} + \frac{\varphi_{m+2}(m)}{\varphi_{m+2}(m+2)} + \ldots,$$

m ayant une valeur assez grande, les termes de la deuxième ligne sont décroissants et tous extrêmement petits.

L'avant-dernier terme de la première ligne est, au contraire, extrêmement grand

$$\varphi_{m-1}(m) = \varphi_{m-1}(m-1) + \varphi'_{m-1}(m-1) + \ldots.$$

Or

$$\varphi'_{m-1}(x) = \varphi_{m-1}(x)\,\varphi_{m-2}(x)\,\varphi_{m-3}(x) \ldots, \varphi_1(x),$$

d'où

$$\frac{\varphi_{m-1}(m)}{\varphi_{m-1}(m-1)}$$
$$= \frac{\varphi_{m-1}(m-1)+\varphi_{m-1}(m-1)+\varphi_{m-2}(m-1)+\ldots+\ldots}{\varphi_{m-1}(m-1)} > \varphi_{m-2}(m-1).$$

On a, d'ailleurs,

$$\psi(m) = \varphi_{m-1}(m)\left[\frac{1}{\varphi_{m-1}(m)} + \frac{1}{\varphi_{m-1}(m-1)} + \frac{\varphi_{m-2}(m)}{\varphi_{m-2}(m-2)\varphi_{m-1}(m)} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{\varphi_2(m)}{\varphi_2(2)\varphi_{m-1}(m)} + \frac{\varphi_1(m)}{\varphi_1(1)\varphi_{m-1}(m)}\right]$$
$$+ \frac{\varphi_{m+1}(m)}{\varphi_{m+1}(m+1)} + \frac{\varphi_{m+2}(m)}{\varphi_{m+2}(m+2)} + \ldots.$$

Il y a, entre crochets, m termes et chacun est inférieur à $\frac{1}{m}$, d'où

$$\psi(m) < \varphi_{m-1}(m).$$

Ainsi, la fonction $\psi(x)$ donne lieu à cette double inégalité

$$\varphi_{m-2}(m-1) < \psi(m) < \varphi_{m-1}(m).$$

On se rend compte de la très faible approximation que donne cette double inégalité, car la fonction $\varphi_{m-1}(x)$ a une croissance bien plus rapide que la fonction $\varphi_{m-2}(x)$.

Pour les fonctions telles que $\psi(x)$ à croissance rapide, les ordonnées correspondant aux abscisses entières ne renseignent plus sur l'allure de la courbe.

CHAPITRE III.

ESQUISSE D'UNE THÉORIE DE LA CROISSANCE.

On a pu se rendre compte, par les Chapitres précédents, de l'importance capitale de la croissance des fonctions dans les questions que nous étudions. Cette importance est assez grande pour que la théorie de la croissance mérite d'être étudiée en elle-même; c'est ce que nous allons faire rapidement.

Nous indiquerons d'abord certains modes de croissance que l'on peut appeler *croissance irrégulière,* puis nous développerons quelques considérations sur les *ordres d'infinitude* de certaines fonctions simples. Nous pourrons alors définir les *croissances régulières.*

Les croissances irrégulières.

Nous allons former une fonction, *croissante ainsi que toutes ses dérivées,* et qui, pour une *infinité* de valeurs de la variable, sera *voisine* de e^x, pour une *infinité* d'autres valeurs de la variable, sera *voisine* de e^{e^x}.

Écrivons d'abord

$$e^x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

$$e^{e^x} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m + \ldots, \tag{2}$$

et formons une fonction $g(x)$ composée de groupes de termes pris alternativement dans (1) et dans (2) :

$$\begin{cases} g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n_1} x^{n_1} + b_{n_1+1} x^{n_1+1} + \ldots \\ \qquad + b_{n_2} x^{n_2} + a_{n_2+1} x^{n_2+1} + \ldots. \end{cases} \tag{3}$$

Il nous faut maintenant un choix convenable des nombres n_1, n_2, ..., n_k, ... et alors, pour des valeurs bien choisies de x, l'on verra que $g(x)$ est voisin de e^x et inférieur à ke^x, ou bien, au contraire, voisin de e^{e^x}, en étant supérieur à he^{e^x}, k étant plus grand que *un* et h plus petit que *un*.

Et, en effet, pour une *certaine valeur* de x, il existe un *certain groupe* de termes à coefficients b ou à coefficients a qui, *à lui seul*, représente très approximativement la fonction. Nous l'allons montrer.

Les coefficients sont tous *positifs* et la variable est *positive*, d'où

$$b_n x^n < e^{e^x}.$$

Soit une autre valeur $x' \neq x$,

$$b_n x'^n < e^{e^x} \left(\frac{x'}{x}\right)^n.$$

Mettons à part le groupe de termes

$$G = a_{n_{2k}+1} x'^{n_{2k}+1} + \ldots + a_{n_{2k+1}} x'^{n_{2k+1}},$$

et considérons tous les autres termes de $g(x')$ dont la somme est inférieure à

$$\sum_{i=0}^{i=n_{2k}} b_i x'^i + \sum_{i=n_{2k+1}}^{\infty} b_i x'^i$$

(car l'on augmente évidemment cette somme en prenant le coefficient b_h là où l'on a le coefficient a_h). Soit x_0 une valeur *fixe*, assez grande. Prenons $x' > x_0$, la première somme est inférieure à celle obtenue en remplaçant chaque terme par le plus grand de tous

$$(4) \qquad \sum_{i=0}^{n_{2k}} b_i x'^i < n_{2k} e^{e^{x_0}} \left(\frac{x'}{x_0}\right)^{n_{2k}}.$$

Prenons ensuite $x_1 > x'$; on peut écrire

$$(5) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=n_{2k+1}}^{\infty} b_i x'^i < e^{e^{x_1}} \left(\frac{x'}{x_1}\right)^{n_{2k+1}} \left[1 + \frac{x'}{x_1} + \left(\frac{x'}{x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x'}{x_1}\right)^p + \ldots\right] \\ \displaystyle\qquad < e^{e^{x_1}} \left(\frac{x'}{x_1}\right)^{n_{2k+1}} \frac{1}{1 - \dfrac{x'}{x_1}}. \end{cases}$$

Soient maintenant $x' = 2e^{x_0}$ et $n_{2k} = e^{\sqrt{x_0}}$, le deuxième membre de l'inégalité (4) sera inférieur à $e^{x'}$. Vérifions-le :

$$e^{\sqrt{x_0}} e^{e^{x_0}} \left(\frac{2e^{x_0}}{x_0}\right)^{e^{\sqrt{x_0}}} < e^{2e^{x_0}}$$

revient à

$$e^{\sqrt{x_0}}\left(\frac{2}{x_0}\right)^{e\sqrt{x_0}} e^{x_0 e^{\sqrt{x_0}}} < e^{e^{x_0}},$$

et cette inégalité, pour x_0 assez grand, est évidente.

On a donc

$$(4') \qquad \sum_{i=0}^{i=n_{2k}} b_i x'^i < e^{x'}.$$

Prenons maintenant

$$x_1 = x'^2$$

et

$$n_{2k+1} = e^{e^{x'}};$$

le deuxième membre de (5) sera encore inférieur à $e^{x'}$. Ceci revient, en effet, à cette inégalité

$$e^{e^{x'^2}}\left(\frac{1}{x'}\right)^{e^{e^{x'}}} < e^{x'},$$

ou bien

$$e^{e^{4e^{2x_0}}} < e^{2e^{x_0}}(2e^{x_0})^{e^{e^{2e^{x_0}}}},$$

inégalité évidente, pour x_0 assez grand.

Nous avons aussi

$$(5') \qquad \sum_{i=n_{2k+1}}^{\infty} b_i x'^i < e^{x'}.$$

et comme, évidemment, l'on a

$$G < e^{x'},$$

il résulte de ceci, de (4') et de (5'), que l'on a

$$(6) \qquad g(x') < 3e^{x'}.$$

Nous avons obtenu l'inégalité annoncée pour la valeur x' de la variable.

Nous avons pris $x' = 2e^{x_0}$; c'est-à-dire

$$x_0 = \log\left(\frac{x'}{2}\right)$$

et

$$n_{2k} = e^{\sqrt{x_0}},$$

ou

$$n_{2k} = e^{\sqrt{\log\left(\frac{x'}{2}\right)}}.$$

Nous définirons maintenant une seconde valeur $x'' > x'$ et n_{2k+2} par la relation analogue

$$n_{2k+2} = e^{\sqrt{\log\left(\frac{x''}{2}\right)}}$$

avec la condition que n_{2k+2} soit *entier* et *supérieur à* n_{2k+1}, et ainsi de suite.

Nous aurons par là une infinité de valeurs ξ de x, telles que

$$g(\xi) < 3e^{\xi}.$$

En ces points la fonction $g(x)$ est, à très peu près, comparable à e^x.

Le même procédé donne une infinité de valeurs η de x, telles que

$$g(\eta) > e^{(e^{\eta}-\eta)}.$$

En ces points la fonction $g(x)$ est comparable à e^{e^x}.

Nous avons ainsi constaté l'existence de fonctions croissantes à allure très irrégulière. Fort heureusement, les fonctions qui se présentent *naturellement* aux géomètres sont, en général, de nature plus simple, elles sont régulières et la suite montrera le sens que nous attachons à ce mot (¹).

Sur les ordres d'infinitude.

Dans toute question relative aux infiniment petits, l'on choisit un *infiniment petit principal* x et on lui compare les autres infiniment petits.

(¹) Dans tout ceci, certains coefficients constants sont sans importance. Ainsi e^x ou $3e^x$ c'est pour nous la même chose, car c'est le même mode de croissance. Ceci est dit une fois pour toutes.

La définition classique de l'*ordre infinitésimal* est alors celle-ci :

« Soit μ un nombre *positif* tel que $\frac{y}{x^\mu}$ *ait une limite* lorsque x tend vers zéro, *l'ordre de* y *est* μ. »

Mais il peut arriver que μ n'existe pas, c'est-à-dire que, ayant posé

$$y = x^\alpha$$

et regardant α comme variable, nous trouvions pour α une plus grande limite et une plus petite limite.

Dans ce cas, il n'est plus de théorie possible des infiniment petits. Il peut arriver encore que l'on ait, quel que soit le nombre positif ε (¹),

$$\lim_{x=0}\left(\frac{y}{x^{\mu-\varepsilon}}\right) = 0,$$

$$\lim_{x=0}\left(\frac{y}{x^{\mu+\varepsilon}}\right) = \infty.$$

Nous dirons alors que l'ordre de y est (μ). (*Prononcez :* μ parenthèse.)

Tout cela peut être répété pour le cas où x et y sont positifs et infiniment grands, en remplaçant le mot *ordre infinitésimal* par *ordre d'infinitude* ou par *degré de grandeur*.

Soit donc x l'*infiniment grand principal*,

$y = x^p$ sera de degré p,
$y = x^p \times x^q$ sera de degré $p + q$.

Soient maintenant y de degré p en x,

$$y = x^p,$$

puis z de degré q en y,

$$z = y^q = x^{pq};$$

on voit que z est de degré pq.

(¹) Voir *Œuvres de Cauchy*, 2ᵉ série, t. IV, p. 281, et le *Bulletin de la Soc. math.* : Communication de M. E. Borel, le 7 mars 1901.

Donc, *faire le produit de* deux degrés *revient à faire le produit de deux opérations fonctionnelles.*

Enfin $y = x^p$ équivant à $x = y^{\frac{1}{p}}$, donc *le* degré *de la fonction inverse d'une fonction est l'inverse du* degré *de cette fonction.*

Voici les premières *définitions* qui nous sont imposées par la considération du mode de croissance le plus simple

$$y = x^p.$$

Après celui-ci, le mode de croissance qui se présente le plus naturellement est

$$y = e^x.$$

Dès que x est assez grand, l'on a

$$e^x > x^p \quad \text{quelque grand que soit } p.$$

Nous dirons que le degré de e^x est ω. Nous choisissons cette notation, déjà adoptée par M. G. Cantor pour ses nombres transfinis, pour mettre en évidence une analogie intéressante entre les deux théories. Mais nous n'insistons pas sur ce point, d'autant plus que notre théorie est complètement indépendante de celle des nombres transfinis.

Avec ce degré ω se présentent des complications que nous allons étudier :

$$e^x x^n \text{ est de degré } \omega + n,$$
$$x^n e^x \text{ est de degré } n + \omega.$$

Donc, n étant fini $\geqq 0$, l'on a

$$\omega + n = n + \omega,$$

c'est-à-dire que *l'addition est commutative.*

Soient maintenant $y = e^x$, puis $z = e^y$; il en résulte

$$z = e^{e^x}.$$

Nous dirons encore que le produit de deux opérations fonctionnelles donne pour degré le produit des degrés, c'est-à-dire que le degré de e^{e^x} ou $\varphi_2(x)$ est ω^2. En général, le degré de $\varphi_m(x)$ sera ω^m.

Nous dirons maintenant que le degré de $\log x$ est l'inverse du

degré de e^x, c'est-à-dire $\frac{1}{\omega}$ ou ω^{-1}, et, en général, que le degré de $\log_m x$ est ω^{-m}.

Avec ces *définitions* l'on vérifie que l'on a

$$\omega^\alpha \times \omega^\beta = \omega^{\alpha+\beta}.$$

Par exemple,

$$\log(e^{e^x})$$

est de degré $\omega^{-1}\omega^2$; d'autre part,

$$\log(e^{e^x}) = e^x$$

qui est de degré ω. Donc

$$\omega^{-1}\omega^2 = \omega \text{ (}^1\text{)}.$$

Il n'y a, jusqu'ici, aucune difficulté.

Soient maintenant

$$y = x^n \qquad \text{de degré } n,$$
$$z = e^y \qquad \text{de degré } \omega.$$

Ceci donne

$$z = e^{x^n}$$

qui est de degré

$$\omega n.$$

Prenons maintenant

$$y = e^x \qquad \text{et} \qquad z = y^n = e^{nx},$$

z est de degré $n\omega$.

---

(1) Ces produits de *degrés* correspondant à des produits d'opérations fonctionnelles seront toujours écrits par nous *au point de vue suivant :*

$$F(z) = f[\varphi(z)]$$

s'écrira

$$F = f\varphi.$$

On applique à z l'opération φ d'abord, puis au résultat on applique l'opération f.

Ceci devait être dit, car l'opération

$$F = f(\varphi)$$

s'écrit quelquefois

$$F = \varphi f.$$

Quand on adopte cette notation, on veut indiquer que l'on effectue *d'abord* (sur z) l'opération φ, et ensuite l'opération f.

Pour nous, c'est le contraire.

On voit bien que

$$\omega n \neq n\omega.$$

La multiplication des degrés n'est pas, en général, commutative. Est-elle associative?

Soient

$$y = e^{x^n} \qquad \text{et} \qquad z = e^{(\log y)^2},$$

l'ordre de y est

$$(\omega n);$$

l'ordre de $\log y$ est

$$\frac{1}{\omega}\omega n;$$

l'ordre de $(\log y)^2$ est

$$\left(2\frac{1}{\omega}\right)(\omega n);$$

l'ordre de $e^{(\log)y^2}$ est

$$\omega\left(2\frac{1}{\omega}\right)(\omega n).$$

Mais

$$\log y = x^n,$$
$$(\log y)^2 = x^{2n}.$$

Donc

$$z = e^{x^{2n}}.$$

Donc

$$\omega\left(2\frac{1}{\omega}\right)(\omega n) = \omega(2n).$$

Donc

$$a(bc) = abc.$$

La multiplication des degrés est associative.

La multiplication est-elle distributive par rapport à l'addition?
Soient $f(x)$ de degré a et $g(x)$ de degré b.
Soit $F(x) = f(x)g(x)$. Le degré de F sera

$$A = a + b.$$

Posons

$$x = \varphi(y),$$

φ étant de degré α. On a

$$F[\varphi(y)] = f[\varphi(y)]g[\varphi(y)],$$

c'est-à-dire

$$A\alpha = a\alpha + b\alpha,$$

ou

$$(\alpha + b)\alpha = a\alpha + b\alpha.$$

C'est dire que *la multiplication* A DROITE *est distributive par rapport à l'addition. Il n'en est pas de même pour la multiplication* A GAUCHE.

En effet, écrire

$$m(p + q) = mp + mq$$

revient à ceci : poser

$$x = \varphi(y)\psi(y),$$

φ étant de degré p et ψ de degré q ; puis former $F(x)$, F étant de degré m.

Or

$$F[\varphi\psi] \neq F(\varphi) \times F(\psi),$$

en général. Donc, en général,

$$m(p + q) \neq mp + mq;$$

ce que nous voulions établir.

Comment obtiendra-t-on maintenant le degré de la *fonction inverse*

$$y = G(x)$$

en fonction du degré de la *fonction donnée*

$$x = F(y)?$$

Prenons

$$y = e^{(\log x)^2}.$$

Son degré est

$$\omega 2 \frac{1}{\omega}.$$

La fonction inverse est

$$x = e^{\sqrt{\log y}},$$

dont le degré est

$$\omega \frac{1}{2} \frac{1}{\omega}.$$

En général, si le degré δ est $\omega^2 n \omega^{-4}$, l'on reconnaîtra que le degré de la fonction inverse est

$$\omega^4 \frac{1}{n} \omega^{-2}.$$

On prend l'inverse de chaque degré composant et l'on renverse *l'ordre de ces degrés.*

On écrira donc

$$\delta = \omega^2 n \omega^{-4}$$

et

$$\frac{1}{\delta} = \omega^4 n^{-1} \omega^{-2}.$$

Si l'on se borne aux fonctions dont le degré n'est pas supérieur à ω^n, n étant un entier positif déterminé, mais aussi grand qu'on voudra, fonctions dont nous dirons que leur degré est *moindre* que ω^ω, on voit qu'avec les *définitions adoptées* dans ce qui précède (définitions logiquement constituées), tout polynome tel que

$$i = ab + cde + fg$$

définit une fonction croissante de *degré de grandeur i.* (a, b, c, ..., g sont des nombres positifs ou l'un des symboles ω, ω^{-1}.)

Jusqu'ici nous avons considéré des *degrés de grandeur* ou *ordres d'infinitude* analogues aux *ordres infinitésimaux* définis à la manière classique que nous rappelions au début du paragraphe.

Mais, de même que, d'après Cauchy, nous avons donné une définition plus large des ordres infinitésimaux avec la notation (μ), de même nous allons, pour les degrés de grandeur, donner une définition *plus compréhensive.*

Un *infiniment grand* peut, comme un *infiniment petit,* n'avoir pas un *ordre déterminé.*

Il peut encore arriver ceci :

Désignons par $F(x \mid b)$ la fonction croissante de degré

$$i = ab + cde + fg.$$

Une fonction $\varphi(x)$ peut être telle que, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut, l'on ait

$$\lim_{x=\infty} \left[\frac{\varphi(x)}{F(x \mid b - \varepsilon)} \right] = \infty,$$

$$\lim_{x=\infty} \left[\frac{\varphi(x)}{F(x \mid b + \varepsilon)} \right] = 0.$$

Nous dirons alors que le *degré de grandeur* de $\varphi(x)$ est

$$j = a(b) + cde + fg.$$

[(b) s'énoncant *b parenthèse*).]

Par exemple $y = x^m \log x$ est de degré $m + \frac{1}{\omega}$, ou encore de degré (m).

Un infiniment grand de degré $(3)\,\omega^2$ est, par définition, compris entre

$$e^{(3-\varepsilon)x^2} \quad \text{et} \quad e^{(3+\varepsilon)x^2}.$$

Un infiniment grand de degré $4\,\omega(2)$ est, par définition, compris entre

$$e^{4x^{2-\varepsilon}} \quad \text{et} \quad e^{4x^{2+\varepsilon}}.$$

On voit que *le symbole* (m) *peut être considéré* comme représentant une certaine *valeur approchée* de m.

Les croissances régulières.

Les fonctions simples, que l'on rencontre naturellement, ont un *degré de grandeur* tel que i ou j. (*Voir* paragraphe précédent.)

Nous appelons *fonctions à croissance régulière celles que l'on peut comparer à ces fonctions simples.*

I. Soit, par exemple, une fonction $\varphi(x)$ telle que, pour x très grand, l'on ait

$$e^{x^\rho} > \varphi(x) > e^{x^{\rho'}} \quad (\rho > \rho'),$$

ρ et ρ' variant avec x.

Si, lorsque x croît indéfiniment, on a deux suites de nombres, la suite des ρ et la suite des ρ' séparées par un nombre ρ'', on voit que le degré de φ sera

$$\omega(\rho'').$$

II. Si l'on a, pour x très grand,

$$x^n e^{x^{\rho''}} > \varphi(x) > x^{n'} e^{x^{\rho''}} \quad (n < n');$$

Si, pour x croissant indéfiniment, la suite des n et la suite

des n' sont séparées par un nombre n'', nous pourrons dire alors que le degré de φ est

$$\omega\rho'' + (n'').$$

Remarques diverses.

Remarque I. — Nous n'avons pas parlé du *quotient* de deux *degrés*. A cause de la *non-distributivité* de la multiplication à gauche, cette notion n'est pas très nette. Nous l'introduirons de la manière suivante :

Soit

$$y = x^\alpha \text{ et } z = x^\beta.$$

Exprimons y en fonction de z

$$y = \left(z^{\frac{1}{\beta}}\right)^\alpha$$

Le degré de y est $\alpha\,\frac{1}{\beta}$.

Nous l'appellerons *quotient* de α par β et nous dirons que *le quotient de deux degrés a, b*, en général, *c'est le degré de $f(x)$ en fonction de $\varphi(x)$*,

$f(x)$ étant en x de degré a,
$\varphi(x)$ » » b.

Remarque II. — Nous ferons encore quelques remarques sur les degrés de grandeur.

Comment, par exemple, mettre en relief la différence qui existe entre ces deux *infiniment grands* : x^2, cx^2 ?

Il suffira de remplacer x^2 par $\log(e^{x^2})$,
d'où

$$cx^2 = \log(e^{x^2})^c,$$

son degré est

$$\frac{1}{\omega}\,c\,\omega\,2,$$

qui est ainsi différencié du degré 2 de x^2.

Cette méthode est très générale et utile pour ce genre de ques-

tions. Elle va nous servir à étudier un fait qui peut paraître *paradoxal* lorsque l'on se fait, sur les degrés de grandeur, des idées *a priori*.

Soient

$$y = \log[\log(\log x)] + 1,$$
$$z = \log[\log(\log x)]$$

deux fonctions qui sont très voisines l'une de l'autre pour x très grand.

Les fonctions inverses sont respectivement

$$x = e^{e^{e^{y-1}}} \quad \text{et} \quad x = e^{e^{e^{z}}}$$

ou bien

$$\left(e^{e^{e^{y}}}\right)^{\frac{1}{e}} \quad \text{et} \quad e^{e^{e^{z}}}$$

Donc une même valeur, très grande, de x, donne des valeurs très grandes pour y et z, très voisines, *de même degré de grandeur,* tandis que pour une même valeur, très grande, donnée à y et à z, l'on obtient deux fonctions x *de degrés différents;* cela peut sembler paradoxal.

Pour nous rendre compte de ce qui arrive, évaluons avec plus de précision le degré de y.

Posons

$$u_0 = e^y = e^{\log_3 x + 1} = e \log_2 x.$$

Posons

$$u_1 = e^{u_0} = e^{e \log_2 x}.$$

Le degré de u_1 est

$$e\omega\omega^{-2} = e\omega^{-1}.$$

Or

$$y = \log_2 u_1,$$

son degré est donc

$$\omega^{-2} e\omega^{-1}.$$

Voilà mise en évidence la différence du degré de y avec celui de z qui est

$$\omega^{-3}.$$

Nous voyons ainsi comment l'on fera la *distinction* entre les degrés de *deux infiniment grands très voisins.*

Remarque III. — Prenons l'infiniment grand le plus simple x^n. Son *degré* est n, celui de sa dérivée est $n-1$, celui de son intégrale est $n+1$.

Est-ce général? Il est clair que non; par exemple pour e^x, la dérivée et l'intégrale ont *même degré* que e^x. Mais voici ce que l'on peut dire :

On peut intégrer une égalité asymptotique.

Soient deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, dont le rapport croît indéfiniment avec x,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x) \qquad \text{(pour } x \text{ assez grand)},$$

$\varphi(x)$ étant une fonction croissante.

Puisque l'*on peut intégrer une égalité asymptotique* (1), le rapport

$$\frac{\int_\alpha^x f(x)\,dx}{\int_\alpha^x g(x)\,dx} = \frac{F(x)}{G(x)}$$

est égal à $\varphi(\xi)$, ξ croissant indéfiniment avec x.

Mais, parce que *l'on ne peut pas*, en général, *différencier une égalité asymptotique,* nous voyons que, étant données deux fonctions croissantes F et G dont le rapport est une fonction croissante, il peut arriver que le rapport de leurs dérivées $f : g$ ne tende vers aucune limite, lorsque x croît indéfiniment.

Si donc, y étant infiniment grand, $\frac{y}{y'}$ est *infiniment grand*, de degré *un*, par exemple,

$$\frac{\int^x y\,dx}{y}$$

sera de même degré.

Prenons un exemple, soit

$$y = e^{x^2}, \qquad y' = 2xe^{x^2};$$

(1) *Voir* H. Poincaré, *Sur les intégrales irrégulières...* (*Acta mathematica*, t. VIII). — *Voir* aussi E. Borel, *Leçons sur les séries divergentes;* 1901.

on a

$$\frac{y'}{y} = 2x$$

de degré *un*; donc l'infiniment grand

$$\frac{y}{\int^{x} e^{x^2} dx},$$

de degré *un*, ce qui nous renseigne sur le degré de l'intégrale dénominateur.

Cette remarque est donc très utile. Nous la compléterons par ceci :

Soit une fonction $\varphi(x)$ *à croissance régulière, c'est-à-dire ayant un* degré de grandeur *déterminé, si sa dérivée est encore à croissance régulière, l'on obtient immédiatement le degré de cette dérivée,* d'après la règle de l'Hospital.

Si

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

a, pour $x = \infty$, une limite, cette limite ne saurait être *autre* que la limite, pour $x = \infty$, de

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

limite dont l'existence est ainsi démontrée.

Par exemple, si $\varphi(x)$ est de degré

$$\omega\rho + n,$$

c'est-à-dire comparable à

$$f(x) = x^n e^{x^\rho};$$

si $\varphi'(x)$ est à croissance régulière, son degré sera celui de

$$f'(x) = x^n \rho x^{\rho-1} e^{x^\rho} + n x^{n-1} e^{x^\rho},$$

c'est-à-dire que le degré de $\varphi'(x)$ sera

$$\omega\rho + n + \rho - 1.$$

CONCLUSION. — Nous pouvons résumer ainsi ce que nous venons de dire sur la théorie de la croissance :

Le degré de l'infiniment grand x^n est n,

» » » $e_1^{e_2^{\cdot^{\cdot^{e_m^x}}}}$ est ω^m,

» » » $\log_m(x)$ est ω^{-m}.

Le symbole ω est défini, en outre, par ces règles :

$$\omega + n = n + \omega,$$

$$\omega^\alpha \omega^\beta = \omega^{\alpha+\beta};$$

en général, la multiplication des degrés n'est pas COMMUTATIVE, elle est ASSOCIATIVE; la multiplication A DROITE est seule DISTRIBUTIVE, par rapport à l'addition.

Le degré de la fonction inverse s'obtient en prenant l'inverse de chaque degré composant et en renversant l'ordre des termes.

Par là les fonctions à croissance régulière sont facilement définies et il est des règles concernant leurs intégrales et leurs dérivées au point de vue de la croissance.

Les critères de convergence et la théorie de la croissance.

Reprenons les critères de Bertrand.

Les séries

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\mu(x) \log_\mu(x)}$$

sont *toutes convergentes.*

Les séries

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\mu(x)}$$

sont *toutes divergentes,* quel que soit μ. Écrivons donc

(1) $$\lambda_1(x) < \lambda_2(x) < \ldots < \lambda_\mu(x) < \ldots,$$

(2) $$\ldots \lambda_\mu(x) \log_\mu(x) < \lambda_{\mu-1}(x) \log_{\mu-1}(x) < \ldots < \lambda_1(x) \log x.$$

Nous pouvons, avec P. du Bois-Reymond, considérer les suites

d'inégalités (1) et (2) comme *définissant une « fonction idéale »* $\tau(x)$

$$\ldots < \lambda_\mu(x) < \ldots < \overline{\tau(x)} < \ldots < \lambda_\mu(x)\log_\mu(x) < \ldots.$$

A certains égards la définition de $\tau(x)$ ressemble à la définition des incommensurables *avec cette différence* que, $\sqrt{2}$, par exemple, étant défini par deux suites, on peut définir très nettement

$$\sqrt{2} + A,$$

A étant commensurable ou non, de même

$$\sqrt{2}\,A, \quad \frac{\sqrt{2}}{A}, \quad \ldots.$$

Il y a là cependant un symbolisme qui pourra être commode, en tous cas une manière rapide de parler. Par exemple, la série

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{F(x)}$$

converge, si, lorsque x est assez grand, on a

$$F(x) > \tau(x),$$

et *diverge* dans le cas où l'on a

$$F(x) < \tau(x).$$

Le concept de *fonction idéale* de P. du Bois-Reymond se relie au concept de *nombre transfini* de M. Cantor.

Partant d'une fonction croissante quelconque nous pouvons former une *infinité dénombrable* de fonctions de plus en plus croissantes.

Le théorème de P. du Bois-Reymond démontré précédemment nous donne une fonction *plus croissante* encore que toutes les précédentes:

Partons de celle-là, nous formons une *infinité dénombrable* de fonctions de plus en plus croissantes, etc.

On voit que ce procédé *n'a pas de limite,* que *la numération* des fonctions croissantes *n'est pas dénombrable,* ne peut être réalisée au moyen de suites indéfinies analogues à la suite naturelle des nombres.

Poser l'existence d'une fonction idéale telle que $\tau(x)$ c'est admettre un nouveau mode d'induction enchaînant non plus une *infinité dénombrable* de propositions mais un *ensemble transfini* (¹).

Rattachons aussi la fonction idéale $\tau(x)$ à la théorie des intégrales convergentes.

Toutes les intégrales divergentes se ramènent à l'une, par exemple à

$$\int^{\infty} dx.$$

Posons

$$dx = \frac{d f(x)}{f'(x)}$$

et

$$f(x) = y.$$

D'où

$$f'(x) = \varphi(y)$$

et l'intégrale divergente devient

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)}.$$

Regardons $\varphi(y)$, c'est-à-dire $f'(x)$, comme *fonction* de y, c'est-à-dire de $f(x)$.

Prenons, par exemple,

$$\varphi(y) = y \log(y) \log_2(y) \ldots [\log_\mu(y)]^{1+\alpha},$$

le degré en y est

$$1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \ldots + \frac{1+\alpha}{\omega^\mu},$$

pour que l'intégrale diverge il faut $\alpha \leqq 0$. Donc le *degré* de $f'(x)$ en *fonction* de $f(x)$, en supposant les croissances régulières, *est*

(¹) *Voir* P. du Bois-Reymond, *Théorie générale des fonctions*, Paris, Hermann, 1887, et G. Cantor, *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis* (*Math. Annalen*, t. XLVI, ou dans les *Mémoires de la Société des Sciences de Bordeaux*, t. III, 5ᵉ série).

Voir enfin les articles de MM. Evellin et Z. et de M. Borel dans la *Revue philosophique* en 1899, 1900, 1901 et les *Leçons sur la Théorie des fonctions*, par M. E. Borel, 1899.

moindre que

$$1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \ldots + \frac{1+\alpha}{\omega^\mu} \qquad (\alpha \leqq 0).$$

En tant que fonction de $f(x)$, la dérivée $f'(x)$ a une croissance limitée.

La limite est la croissance de la fonction idéale $\tau(x)$.

Nous retrouvons sous un nouvel aspect cette fonction idéale, frontière de séparation des fonctions $F(x)$ qui donnent des séries

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{F(x)}$$

et des intégrales

$$\int^{\infty} \frac{1}{F(x)} dx,$$

convergentes ou divergentes.

CHAPITRE IV.

SÉRIES ET INTÉGRALES MULTIPLES.

Séries multiples.

Soit une série à termes *positifs*

$$\sum\sum v_{\alpha,\beta}.$$

Pour que la série converge, il faut et il suffit que la somme d'un nombre quelconque de termes reste inférieure à un nombre fixe.

Dans ces conditions, l'on démontre que la somme de la série est la même quel que soit l'ordre des éléments.

La recherche de *critères* est liée au mode de groupement des termes, il est évident que :

A tout critère pour les séries simples, *et à tout mode de groupement des termes de la série* double *correspond un critère pour cette dernière série.*

L'arrangement le plus simple consiste à poser

$$v_{\alpha,\beta} = u_m$$

d'après la correspondance réglée par ce Tableau :

	$\alpha = 1$	2	3	4	5
$\beta = 1$	u_0	u_2	u_5	u_9	u_{14}
2	u_1	u_4	u_8	u_{13}	
3	u_3	u_7	u_{12}		
4	u_6	u_{11}			

Prenons, par exemple, $v_{3,2} = u_8$.

Il est clair que le rang 8 de ce terme est compris entre 5 et 9 rangs extrêmes de la diagonale qui passe par 8 et de la diagonale précédente; d'où, en général,

$$m \leqq 1 + 2 + 3 + \ldots + (\alpha + \beta - 1),$$
$$m > 1 + 2 + 3 + \ldots + (\alpha + \beta - 2)$$

ou

$$\frac{(\alpha + \beta - 2)(\alpha + \beta - 1)}{2} < m \leqq \frac{(\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta)}{2},$$

c'est-à-dire, dès que $(\alpha + \beta)$ est pris assez grand,

$$\frac{1}{3}(\alpha + \beta)^2 < \alpha < \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2;$$

or la série

$$\sum u_m$$

converge, si l'on a

$$u_m < \frac{1}{m^{1+\rho}} \qquad (\rho > 0).$$

Donc la série

$$\sum\sum v_{\alpha,\beta}$$

converge, si l'on a

$$v_{\alpha,\beta} < \frac{1}{(\alpha + \beta)^{2+\rho}} \qquad (\rho > 0),$$

diverge, si l'on a

$$v_{\alpha,\beta} > \frac{1}{(\alpha + \beta)^2}.$$

Voici une première règle fort utile. De cette règle, on en tire, d'ailleurs, une seconde, ainsi qu'il suit :

A condition que l'on ait

$$s > 0,$$

l'on peut écrire

$$(\alpha + \beta)^s > \alpha^s + \beta^s.$$

Posons alors

$$\alpha + \beta = t,$$

le minimum pour $\alpha^s + \beta^s$ a lieu pour

$$\alpha = \beta = \frac{t}{2}.$$

Ce minimum est donc

$$2\left(\frac{t}{2}\right)^s = \frac{(\alpha+\beta)^s}{2^{s-1}}.$$

L'on voit alors que, *si l'on a* $s > 2$, *la série double converge certainement, si l'on a aussi*

$$v_{\alpha,\beta} < \frac{1}{\alpha^s + \beta^s}.$$

Les groupements correspondent ici aux aires limitées par l'axe positif des α, l'axe positif des β, et des droites $\alpha + \beta = \text{const.}$

Faisons un autre groupement en prenant tous les points à coordonnées entières de l'aire limitée par les deux axes positifs et par une branche de la parabole

$$y = (x - x_0)^2$$

(x_0 sera un paramètre, comme t, croissant indéfiniment).

Lorsque x_0 tend vers l'*infini*, il est clair que le rang m de u_m, qui correspond à $v_{\alpha,\beta}$, tend vers l'aire limitée par les axes et la parabole, puisque m est le nombre des carrés extérieurs à la branche gauche de la parabole.

L'aire étant $\frac{x_0^3}{3}$, l'on a

$$m = \frac{x_0^3}{3}(1-\varepsilon) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \text{ tend vers } \textit{zéro} \text{ si } x_0 \\ \text{tend vers l'}\textit{infini}; \end{array} \right.$$

or la série $\sum u_m$ est convergente, si l'on a

$$u_m < \frac{1}{m^{1+\rho}} \qquad (\rho > 0).$$

Donc la série $\sum\sum v_{\alpha,\beta}$ *converge, si l'on a*

$$v_{\alpha,\beta} < \frac{1}{(\alpha + \sqrt{\beta})^{3+\rho}} \qquad (\rho > 0),$$

ou encore, si l'on a,

$$v_{\alpha,\beta} < \frac{1}{\alpha^\sigma + \beta^{\frac{\sigma}{2}}} \qquad (\sigma > 3).$$

Il est toujours *sous-entendu :* « à partir de certaines valeurs pour α et β ».

On peut multiplier à l'infini ces critères par le choix de courbes convenables du plan (α, β). Ces critères s'étendent, d'eux-mêmes, aux séries n-uples.

La question se rattache d'ailleurs à celle de la convergence des intégrales multiples.

Intégrales multiples.

Nous supposerons encore que c'est le champ d'intégration qui devient *infini* et non point l'élément différentiel.

Soit, par exemple,

$$I = \underbrace{\int_1^\infty \int_1^\infty \cdots \int_1^\infty}_{n} \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_n}{(\Sigma x_i^2)^\alpha}.$$

Nous poserons

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_1, \\ x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_3 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

alors on a

$$I = \int_1^\infty \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots)}{\partial(r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots)} \frac{dr}{r^{2\alpha}} = K \int_1^\infty \frac{dr}{r^{2\alpha-n+1}}.$$

La convergence exige que l'on ait

$$2\alpha - n + 1 > 1$$

ou

$$\alpha > \frac{n}{2},$$

comme il est bien connu.

Cette règle s'étend de suite au cas où l'on a

$$\underbrace{\int\int \cdots \int}_{n} \frac{dx_1 \ldots dx_n}{[Q(x_i)]^\alpha},$$

le symbole $Q(x_i)$ désignant une forme quadratique *définie positive* en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Mais dans tout ceci l'on suppose une certaine *symétrie* relative aux variables. Nous allons aborder un cas plus général.

Soit, par exemple, à étudier

$$J = \int^{\infty}\int^{\infty} \frac{dx\,dy}{x^{\alpha}+y^{\beta}}.$$

Traçons les courbes $x^{\alpha}+y^{\beta}=t$. L'on a

$$dx\,dy = dS$$

élément de surface. Donc

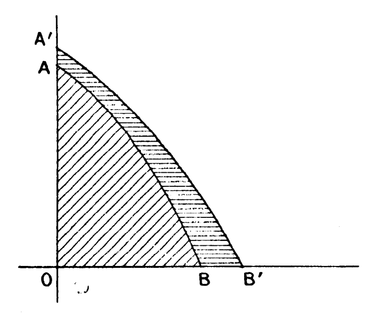
$$J = \int^{\infty} \frac{dS}{t}.$$

Posons

$$x^{\alpha} = tu,$$
$$y^{\beta} = t(1-u),$$

t étant considéré comme fixe, u variant de o à 1.

Fig. 1.



L'aire S(OAB) est

$$S = \int_0^1 t^{\frac{1}{\beta}}(1-u)^{\frac{1}{\beta}} t^{\frac{1}{\alpha}} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1}{\alpha}\,du = t^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}\int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{\beta}} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{du}{\alpha}$$

$$= t^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}\frac{1}{\alpha\beta}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-1\right)} \quad (^1),$$

$$S = A\,t^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}},$$

(1) *Voir*, par exemple, le *Cours* autographié de Hermite.

A étant connu en fonction de α et β, d'où

$$dS = A' t^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-1} dt,$$

d'où enfin

$$J = A' \int^{\infty} t^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-2} dt.$$

La condition nécessaire et suffisante de convergence pour J *est donc*

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-2<-1$$

ou

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}<1.$$

Ceci s'étend aisément à l'intégrale

$$K = \int^{\infty}\int^{\infty}\cdots\int^{\infty} \frac{dx_1\,dx_2\ldots dx_n}{x_1^{\alpha_1}+x_2^{\alpha_2}+\ldots+x_n^{\alpha_n}}.$$

La condition nécessaire et suffisante de convergence pour K *est*

$$\sum_1^n \frac{1}{\alpha_i}<1.$$

L'un des exposants doit dépasser l'*unité* si tous les autres sont très grands.

Nous n'insisterons pas sur ces questions et sur les relations entre séries n-uples et intégrales n-uples.

CHAPITRE V.

SÉRIES DE PUISSANCES A UNE VARIABLE.

Convergence des séries à une variable.

Soit

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

Cauchy a donné la règle suivante retrouvée indépendamment par M. Hadamard :

Soit λ la plus grande des limites de la suite

$$\ldots, \quad \sqrt[n]{|a_n|}, \quad \ldots,$$

ce que l'on peut écrire

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda,$$

le *rayon de convergence* de la série est

$$\rho = \frac{1}{\lambda}.$$

L'on distinguera donc quatre cas :

1er

$$\lambda = 0, \qquad \rho = \infty,$$

2e et 3e : λ fini, c'est-à-dire (par un changement de variable)

$$\lambda = 1, \qquad \rho = 1,$$

et ce cas se subdivise en deux suivant que $\sum a_n$ converge ou non ;

4^{e}

$$\lambda = \infty, \qquad \rho = 0.$$

Nous laisserons ici de côté ce dernier cas, celui de la série de Taylor toujours divergente.

Ce paragraphe est consacré au premier cas et nous supposons, en outre, sauf indication contraire, tous les a_n *positifs* et x *positif,* comme nous l'avons dit au commencement de l'Ouvrage.

Fonctions entières.

Nous avons donc

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n}=0 \tag{1}$$

et nous nous proposerons d'étudier la relation entre la croissance de la fonction entière représentée par la série et la décroissance des coefficients a_n.

La question se scinde en deux dont voici la première :

Premier problème. — *Quel est le degré de grandeur de la fonction, le degré des coefficients étant donné?*

Posons

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\varphi(n).$$

D'après (1) l'on voit que $\varphi(n)$ est une fonction croissante de n. Fixons son mode de croissance.

Supposons $\varphi(n)=n^p$, le degré de grandeur p étant *positif, commensurable ou non.*

Nous allons voir qu'il est *un terme* de la série

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots$$

qui surpasse tous les autres et donne à la fonction son degré de grandeur.

L'on a, en effet,

$$a_m=\frac{1}{[\varphi(m)]^m}=\frac{1}{m^{mp}},$$

d'où

$$a_m x^m=\frac{x^m}{m^{mp}}.$$

Nous considérons x comme ayant une valeur déterminée.

Écrivons

$$y=x^p,$$

y est aussi déterminé et y croît avec x. Le terme général s'écrit alors

$$a_m x^m=\left(\frac{y}{m}\right)^{pm},$$

y étant fixé nous avons deux catégories de termes, ceux dont le rang m est supérieur à y et ceux dont le rang est inférieur à y. Étudions les deux sommes correspondantes.

A. *Somme des termes* tels que l'on ait $m > y$. Écrivons

$$\frac{y}{m} = \frac{1}{1 + \frac{m-y}{y}}.$$

Soient $m' - 1$ et m' les deux entiers comprenant y.

Nous avons ici

$$m \geqq m' \geqq y,$$

d'où

$$1 + \frac{m-y}{y} > 1 + \frac{m-m'}{m}.$$

D'ailleurs m est grand puisque x et y sont grands. Donc

$$\left(1 + \frac{m-m'}{m}\right)^{pm} = e^{(m-m')p} + \varepsilon_m$$

(ε_m tendant vers *zéro* lorsque x croît).

D'où l'inégalité, assez serrée,

$$a_m x^m < \frac{1}{(e^p)^{m-m'}}, \qquad (m \geqq m' \geqq y).$$

Donc la somme des termes de rang

$$m', \quad m'+1, \quad m'+2, \quad \ldots, \quad \infty$$

est inférieure à

$$1 + e^{-p} + e^{-2p} + \ldots = \frac{e^p}{e^p - 1}.$$

Or l'on a

$$p > 0,$$

donc $\frac{e^p}{e^p-1}$ est un nombre *fini* comme p. (Si l'on a $p > 1$, ce nombre est certainement inférieur à 2.)

Ainsi, *quelque grand que soit le nombre déterminé x, nous avons dans la série une* infinité *de termes sans influence sur le degré de grandeur de la série.*

B. Considérons maintenant les termes dont le rang est inférieur à m'. Leur nombre est m'. *Le plus grand* d'entre eux *vaut* à lui seul presque *toute la somme* et détermine par suite le degré de

la fonction. Quel est ce terme maximum

$$a_M x^M = \left(\frac{y}{M}\right)^{pM} ?$$

Écrivons

$$\theta(z) = \left(\frac{y}{z}\right)^{pz},$$

d'où

$$\frac{\theta'(z)}{\theta(z)} = \frac{d}{dz}[pz \log \varphi - pz \log z] = p \log y - p \log z - p,$$

$\theta(z)$ est maximum pour

$$\log z = \log \varphi - 1,$$
$$z = \frac{y}{e}.$$

Nous prendrons donc pour M le plus grand entier contenu dans $\frac{y}{e}$

$$M = E\left(\frac{y}{e}\right) = s.$$

L'on en déduit

$$y \geq es.$$

Le terme maximum est

$$a_s x^s \geq \left(\frac{y}{s}\right)^{ps} \geq e^{ps}.$$

Enfin l'on a

$$f(x) > e^{ps}$$

et l'inégalité est assez serrée, car le rapport de ce terme maximum à un autre terme est très petit.

D'ailleurs, l'on a aussi

$$f(x) < y e^{ps},$$

car nous avons m' termes $(m' \leq y)$, et la série est inférieure au terme maximum répété m' fois.

En définitive, écrivons

$$\frac{y}{e} = s + a \qquad (a < 1),$$

nous aurons

$$ps = \frac{py}{e} - pa \qquad (pa < p),$$
$$= \frac{p}{e} x^{\frac{1}{p}} - pa.$$

d'où

$$e^{\frac{p}{e}x^{\frac{1}{p}}-pa} < f(x) < x^{\frac{1}{p}} e^{\frac{p}{e}x^{\frac{1}{p}}-pa}.$$

Concluons par ce THÉORÈME :

$\varphi(n)$ étant de degré p,

$f(x)$ est de degré $\omega\left(\frac{1}{p}\right)$.

Plus généralement (il n'y a presque rien à modifier aux raisonnements)

Si $\varphi(n)$ est de degré (p),

$f(x)$ sera de degré $\omega\left(\frac{1}{p}\right)$.

Nous avons, dans la démonstration, supposé que p était un nombre positif, commensurable ou non; p pourrait, bien entendu, représenter un degré de grandeur tel que i ou j (Chap. III) dont nous savons former l'inverse $\frac{1}{p}$.

Les premiers travaux sur les séries entières, *à ce point de vue,* sont ceux de M. H. Poincaré (1) et de M. J. Hadamard (2). Ce dernier a précisé et simplifié ses résultats dans une Note (3) que nous allons reproduire ici presque textuellement, en conservant même le langage relatif au domaine complexe.

Soit une fonction entière

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots.$$

Portons en abscisses les valeurs m et en ordonnées les valeurs $\mu = \log\left|\frac{1}{a_m}\right|$, formons un *polygone de Newton* Π passant par une infinité de points et laissant tous les autres *au-dessus.* Les coefficients angulaires des côtés deviennent, à partir d'un certain rang, positifs et même de plus en plus grands.

Désignons maintenant par η le logarithme du module maximum

(1) *Bulletin de la Société Mathématique de France,* 1883.

(2) *Journal de M. Jordan,* 1893.

(3) *Société Mathématique de France,* p. 186; 1896.

de la fonction sur la circonférence de rayon e^ξ(ξ réel). Comme le logarithme du module d'une fonction analytique est une *fonction harmonique* (on le vérifie de suite), η croît avec ξ.

Donc le lieu C du point (ξ, η) est une courbe tournant sa concavité vers les η positifs.

Soit (ξ, η) un point de C, les expressions des a_m par des intégrales donnent de suite

$$|a_m| < e^{\eta - m\xi}$$

ou

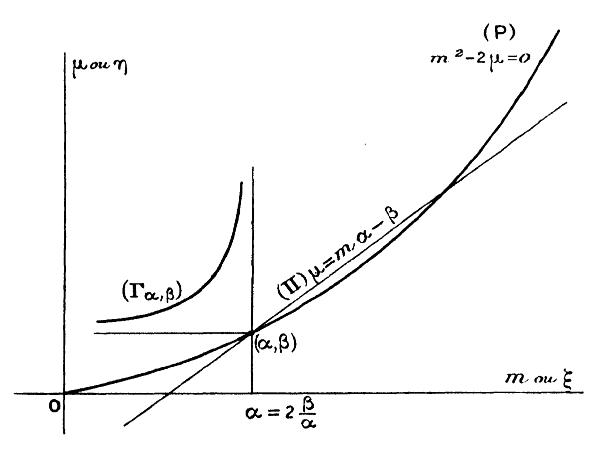
$$\mu + \eta - m\xi > 0.$$

Si l'on annule le premier membre de cette dernière inégalité, on a la *polaire* de (ξ, η) par rapport à la parabole à axe vertical

(P) $$m^2 - 2\mu = 0.$$

Formons donc le contour C_1 *réciproque* de Π par rapport à P, *la courbe* C *est tout entière au-dessus du contour* C_1.

Fig. 2.



Nous allons, en second lieu, former un contour situé au-dessus de C.

Soit donc $\mu = m\alpha - \beta$, un côté du polygone Π. Le point (α, β) appartient à la fois à Π et à P, donc il est un sommet de C_1.

L'on a donc

$$\log \frac{1}{|a_m|} > m\alpha - \beta$$

ou

$$|a_m| < e^{\beta - m\alpha}.$$

Portant dans l'expression de $f(x)$, l'on obtient, pour $\xi < \alpha$,

$$e^{\eta} < \frac{e^{\beta}}{1 - e^{\xi - \alpha}}.$$

Formons donc la courbe

$$(\Gamma) \qquad e^{x} + e^{-y} = 1$$

qui admet ox, oy pour asymptotes et reste dans l'angle $x'oy$.

Par chaque point (α, β) sommet de C_1 faisons passer une courbe, telle que (Γ)

$$(\Gamma_{\alpha,\beta}) \qquad e^{x-\alpha} + e^{-(y-\beta)} = 1.$$

Rejoignons ces courbes par leurs tangentes communes, nous avods un contour mixtiligne C_2. La dernière inégalité écrite, comparée à l'équation de la courbe $(\Gamma_{\alpha,\beta})$, montre que *la courbe* C *est tout entière au-dessous de* C_2.

Les deux contours C_1'' et C_2'', qui se rapprochent sans cesse l'un de l'autre, limitent la fonction. Ils la représentent donc asymptotiquement.

Cette conception et cette image géométrique devaient être indiquées ici.

Nous parlerons, enfin, d'une Note récente et fort intéressante de M. E. Le Roy ([1]), sur laquelle nous reviendrons, d'ailleurs, dans le paragraphe suivant.

M. Le Roy donne des représentations asymptotiques de fonctions entières en passant par le calcul asymptotique de certaines intégrales asymptotiquement équivalentes aux séries considérées.

Prenons un exemple

$$a_n = \frac{1}{(n!)^p}.$$

([1]) Cette Note, parue dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques,* quoique datée de *novembre* 1900, n'a été publiée, en réalité, qu'*après* le mois de *janvier* 1901, époque à laquelle M. Borel a fait la leçon d'après laquelle je rédige ce paragraphe. (*Note du Rédacteur.*)

La priorité de publication de M. Le Roy n'en est pas moins incontestable.

E. B.

M. Le Roy obtient, pour $x = \infty$,

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{p}}(2\pi)^{\frac{1-p}{2}} x^{\frac{1-p}{2p}} e^{px^{\frac{1}{p}}},$$

et il indique qu'il obtient ainsi *plus de précision* que M. J. Hadamard.

Nous renverrons à ce Mémoire, en faisant remarquer que la méthode de M. Borel donne *immédiatement* une approximation assez grande. On le voit par cet exemple, en remarquant que $n!$ est comparable à n^n, donc $(n!)^p$ à n^{np}; $\varphi(n)$ est donc comparable à n^p, c'est-à-dire d'ordre p, et $f(x)$ est bien, pour $x = \infty$, approximativement d'ordre $\omega\frac{1}{p}$.

Il nous faut, enfin, traiter le problème inverse; mais nous ferons, auparavant, une petite remarque : la considération des ordres d'infinitude des coefficients montre immédiatement, sans qu'il soit nécessaire d'y insister, que *l'on augmente beaucoup la convergence d'une série par des groupements de termes.*

Deuxième problème. — *Peut-on, du degré de grandeur de la fonction entière, déduire le degré de grandeur des coefficients?*

Cette question a été abordée, pour la première fois, par M. H. Poincaré, puis par M. J. Hadamard (1).

Nous avons montré ceci :

Soit

$$\varphi(n) = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}},$$

si $\varphi(n)$ est, en n, de degré (α), $f(x)$ est de degré $\omega\frac{(1)}{\alpha}$.

Nous en concluons de suite ceci :

Mettons le degré de $f(x)$ sous la forme

$$\omega\frac{(1)}{\alpha} \quad \text{ou} \quad \omega\frac{1}{\alpha}$$

(suivant les cas).

(1) *Voir* E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 62-70; 1900.

Si $\varphi(n)$ a un degré déterminé, ce degré est (α) ou α; car, si l'on avait $\varphi(n) < n^\beta$, $\beta < \alpha f(x)$ ne pourrait pas être du degré donné.

Si l'on écrit $\varphi(n) = n^\gamma$, en considérant γ comme fonction de n, l'on peut affirmer que l'on a

$$\text{plus petite} \lim_{(n=\infty)} (\gamma) = \alpha.$$

L'on voit que la question ne comporte pas de *réponse absolue*.

Enlevons, par exemple, à une série entière une infinité de termes infiniment espacés

$$\sum a_n x^n,$$

nous pourrons le faire sans que la fonction soit sensiblement modifiée. Or ceci nous donne

$$\varphi(N) = \frac{1}{0} = \infty$$

pour les indices N des coefficients qui ont été supprimés.

La croissance de $\varphi(n)$ peut être *très irrégulière* sans qu'il en soit de même pour $f(x)$.

La difficulté du second problème est infiniment supérieure à celle du premier.

Cas du rayon de convergence fini.

Nous employons encore ici le langage relatif aux fonctions d'une variable complexe. Par un changement simple de variable, le rayon de convergence R devient égal à *un*.

Soit donc

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Les a sont *positifs*, x est *positif* et *inférieur* à *un*. Nous supposons *divergente* la série

$$A = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

en sorte que le point $+1$ est un *point singulier* de $f(x)$. Nous allons étudier la croissance de $f(x)$ lorsque x s'approche de ce point singulier.

Tout d'abord l'on peut *comparer* $f(x)$ à une autre fonction $g(x)$ de même nature, c'est-à-dire convergente pour $x < 1$ et la série des coefficients étant divergente, d'après une proposition de M. Cesàro, dont l'origine est une Note de M. Appell (1).

Nous suivrons l'exposition de M. Cesàro (2) :

On a donc

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots,$$

la série des coefficients b étant divergente.

Supposons que l'on ait

$$\lim_{n=\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \alpha.$$

Nous avons donc, par définition même,

$$b_n(\alpha - \varepsilon) < a_n < b_n(\alpha + \varepsilon),$$

lorsque n est supérieur à p (p dépendant du nombre très petit ε), d'où

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_p x^p + \sum_{p+1}^{\infty} b_n(\alpha + \theta\varepsilon) x^n$$

(avec $0 < \theta < 1$), ou encore

$$f(x) < (\alpha + \varepsilon) g(x) + [a_0 - b_0(\alpha + \varepsilon)] + \ldots + [a_p - b_p(\alpha + \varepsilon)] x^p,$$

ou

$$\frac{f(x)}{g(x)} < \alpha + \varepsilon + \frac{(a_0 - \ldots) + (a_p - \ldots) x^p}{g(x)}.$$

Tout de même l'on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \alpha - \varepsilon + \frac{[a_0 - b_0(\alpha - \varepsilon)] + \ldots + [\ldots] x^p}{g(x)},$$

d'où ce résultat :

THÉORÈME. — *Si $a_n : b_n$ tend vers une limite α, l'on a aussi*

$$\lim_{x=1}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \alpha.$$

Mais le premier membre $f : g$ peut avoir une limite sans que

(1) *Sur certaines séries*, etc. (*Comptes rendus*, t. LXXXVII).

(2) *Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli;* décembre 1893.

$a_n : b_n$ en ait une, par exemple si les *lacunes* ne se correspondent pas.

L'on peut quelquefois lever la difficulté par l'artifice suivant :

$$\frac{f(x)}{1-x} = a_0 + (a_0 + a_1)x + \ldots + (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)x^n + \ldots,$$

et tout de même

$$\frac{g(x)}{1-x} = \sum (b_0 + b_1 + \ldots + b_n)x^n.$$

Supposons donc que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{b_0 + b_1 + \ldots + b_n} \right) = \beta,$$

l'on aura, d'après ce qui précède,

$$\lim_{x=1} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \beta,$$

théorème plus général que le précédent.

L'on démontre aisément, d'ailleurs, que si *la limite* α *existe, la limite* β *existe et est la même.* L'inverse, évidemment, est généralement faux.

Nous allons appliquer ceci :

Exemple I. — $f(x) = \sum n^{p-1} x^n$; comparons à

$$\frac{1}{(1-x)^p} = 1 + \frac{p}{1}x + \ldots + \frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}{1, 2, \ldots, n} x^n + \ldots,$$

on a

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{n!\, n^{p-1}}{p(p+1)\ldots(p+n-1)} = \Gamma(p),$$

d'où

$$\lim_{x=1} (1-x)^p (1^{p-1}x + 2^{p-1}x^2 + \ldots) = \Gamma(p).$$

Nous voyons l'allure de $f(x)$ pour $x = 1$.

Exemple II. — $f(x) = \sum a_n x^n$ avec

$$\lim_{n=\infty} (n^{1-p} a_n) = k \text{ (}^1\text{)},$$

---

(1) *Voir* Appell, Note déjà citée.

ou, plus généralement, avec

$$\lim_{n=\infty} [n^{1-p}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)] = k,$$

l'on a

$$\lim_{x=1} (1-x)^p f(x) = k\Gamma(p).$$

Exemple III. — $f(x) = x^\alpha + x^\beta + x^\delta + \ldots$; comparons à

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots.$$

L'on a

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} = \frac{\omega}{n},$$

ω est le nombre des termes de $f(x)$ de rang inférieur ou égal à n. Si $\frac{\omega}{n}$ admet une limite Ω que l'on peut appeler la *fréquence* des entiers α, l'on voit que

$$\lim_{x=1} (1-x)(x^\alpha + x^\beta + \ldots) = \Omega;$$

la série donnée est *asymptotique* à $\frac{\Omega}{1-x}$ au voisinage de $x = 1$.

Choisissons un exemple particulier que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques,

$$\varphi(x) = x + x^4 + x^9 + x^{16} + \ldots.$$

Ici

$$\Omega = \lim_{n=\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0,$$

d'où

$$\lim_{x=1} (1-x)(x + x^4 + \ldots) = 0.$$

Reportons-nous à l'*Exemple II*, en faisant

$$p = \frac{1}{2}, \qquad k = 1;$$

il vient

$$\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right],$$

$$\lim_{x=1} \sqrt{1-x}\,(x + x^4 + x^9 + \ldots) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Puis formons

$$[\varphi(x)]^2 = x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots,$$

n est une somme de deux carrés, donc A_n représente le nombre des *partitions* de n en deux carrés. L'on a

$$\lim_{x=1} (1-x)[\varphi(x)]^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Si donc $\frac{A_n}{n}$ a une limite, elle est $\frac{\pi}{4}$ ($\frac{A_n}{n}$ est le nombre *moyen* de manières possibles pour la décomposition de n en somme de deux carrés).

Nous renverrons, pour d'autres exemples, pour d'autres applications arithmétiques intéressantes, au Mémoire de M. Cesàro. Sa méthode donne surtout, en somme, des représentations asymptotiques en $(1-x)^{-p}$ de la fonction au voisinage du point *un*. Nous allons procéder maintenant à une étude directe des séries et nous comparerons les résultats à ceux obtenus par M. Le Roy dans le Mémoire cité déjà.

Étude directe et comparaison avec une méthode proposée par M. Le Roy.

Dans la Conclusion de son Mémoire ([1]) sur les zéros des fonctions entières, M. Borel disait ceci : « Si la fonction *entière* devient très grande lorsque le module de la variable augmente, c'est surtout parce que, pour chaque valeur du module, *un* terme devient très grand et non parce que *beaucoup* de termes deviennent très grands. » Ce principe a trouvé déjà plusieurs fois son application dans cet Ouvrage. Nous allons faire usage ici, pour une série à rayon de convergence *fini*, d'un principe tout à fait pareil.

I. Soit donc la série :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

avec

$$a_m = e^{m^k}, \qquad 0 < k < 1.$$

Donnons à x une valeur fixe et cherchons le terme maximum

$$a_n x^n = e^{n^k + n \log x}.$$

([1]) *Acta Mathematica*, t. XX.

Annulons la dérivée logarithmique

$$kn^{k-1} + \log x = 0.$$

Ceci donne le rang n du terme maximum. Pour parler très exactement, l'on prendra l'entier le plus voisin de n.

D'ailleurs, la règle de l'Hospital donne

$$\lim_{x=1}\left(\frac{x-1}{\log x}\right) = 1;$$

donc, au voisinage de *un* l'on peut écrire

$$\frac{1}{1-x} = (k+\varepsilon)^{-1} n^{1-k} \quad \left\{\begin{array}{lll} & \varepsilon \text{ tend vers } \textit{zéro} & \\ \text{si } x & \text{»} & \textit{un}, \\ \text{ou } n & \text{»} & \infty, \end{array}\right.$$

d'où l'expression suivante du *terme maximum*

$$a_n x^n = e^{(1-k)n^k} = e^{(1-k)\left(\frac{k+\varepsilon}{1-x}\right)^{\frac{k}{1-k}}} = e^{k'\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{k}{1-k}}}.$$

Ce terme donne le *degré de grandeur de la fonction.*

Posant

$$\frac{1}{1-x} = t,$$

l'on voit que $f(t)$, pour $t = \infty$, *est de degré* $\omega\left(\frac{k}{1-k}\right)$, a_n *étant de degré* ωk en n.

Si k est *très voisin de un,* le degré de grandeur de la fonction, pour $x = 1$, est *très grand.*

II. Soit maintenant la série

$$\sum a_n x^n$$

avec

$$a_m = e^{\frac{m}{\log m}}.$$

Ce coefficient est, en m, de degré $\omega\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)$. Cherchons encore le *terme maximum*. L'on a

$$a_n x^n = e^{\frac{n}{\log n} + n\log x},$$

il faut donner à n une valeur telle que

$$\frac{1}{\log n} - \frac{1}{(\log n)^2} + \log x = 0.$$

Comme

$$\lim_{x=1}\left(\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{-1}{\log x}}\right) = 1,$$

on a

$$\frac{1}{1-x} = (1+\varepsilon)\log n \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \text{ tend vers } \textit{zéro} \\ \text{si } x \text{ tend vers } \textit{un}. \end{array} \right.$$

Le terme maximum est donc

$$e^{\frac{n}{\log n} + n\left[\frac{1}{(\log n)^2} - \frac{1}{\log n}\right]} = e^{\frac{n}{(\log n)^2}}.$$

Or

$$\log n = (1-\varepsilon')t;$$

si l'on pose $\frac{1}{1-x} = t$, le terme maximum devient

$$e^{\frac{(1-\varepsilon')^2}{t^2}e^{(1-\varepsilon')t}} = e^{e^{(1-\varepsilon'')t}};$$

le degré de grandeur de $f(t)$ est

$$\omega^2 \times (1).$$

On peut vérifier que $f(x)$ ne dépasse pas beaucoup le terme maximum. Montrons, par exemple, qu'un terme de rang $p = n^2$ (n étant le rang correspondant au maximum) est très petit

$$a_p x^p = e^{\frac{p}{\log p} - p\left[\frac{1}{\log n} - \frac{1}{(\log n)^2}\right]},$$

$$a_p x^p < e^{\frac{n^2}{\log n}\left[\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{\log n}\right]},$$

n lui-même est grand, si x est voisin de *un*. D'où

$$a_p x^p < e^{-M\frac{n^2}{\log n}} \qquad (1 > M > 0).$$

Nous sommes donc bien certains que l'on a

$$a_n x^n < f(x) < n^2 a_n x^n.$$

Or

$$n^2 = e^{2(1-\varepsilon')t}$$

est très petit à côté de e^{e^t}. C'est ce que nous voulions obtenir.

III. De la même manière, si l'on a

$$a_m = e^{\frac{m}{\log_h(m)}},$$

on trouvera que $f(t)$ est de degré

$$\omega^{h+1} \times (1),$$

et nous pouvons dresser le Tableau suivant :

$f(x)$ ayant pour rayon de convergence *un*.

Les ordres de a_m en m étant	Les ordres de $f(x)$ en $\frac{1}{1-x}$ seront
$p-1$,	p,
ωk,	$\omega\left(\frac{k}{1-k}\right)$,
$\omega\left(1-\frac{1}{\omega}\right)$,	$\omega^2(1)$,
$\omega\left(1-\frac{1}{\omega^h}\right)$.	$\omega^{h+1}(1)$.

M. Le Roy, de son côté, vient de donner récemment (1) une « Méthode pour le calcul asymptotique de certaines intégrales définies », méthode qui donnera des résultats relatifs aux « séries asymptotiquement équivalentes à ces intégrales ».

Il démontre, par exemple, que si a_m (ou sa partie principale) est

$$\frac{1}{m^p} \qquad (0 < p < 1),$$

on a

$$f(x) \sim \frac{1}{(1-x)^{1-p}},$$

si

$$pp(a_m) = \frac{1}{(\log m)^p} \qquad (p > 0),$$

on a

$$f(x) \sim \frac{1}{(1-x)\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^p}.$$

(1) Nous avons expliqué au Chapitre précédent comment les travaux de MM. Le Roy et Borel étaient indépendants, quoique le *Bulletin* porte la date : Novembre 1900.

Si

$$pp(a_m) = \frac{1}{m \log m \log_2 m \ldots \log_{p-1} m (\log_p m)^q} \qquad (q < 1),$$

on a

$$f(x) \sim \left[\log^p \left(\frac{1}{1-x}\right)\right]^{1-q}.$$

Il donne encore

$$\log_{(x=1)} x \sim \frac{1}{1-x} \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

en partant de la série de Lambert :

$$\log z = \sum_1^\infty \frac{z^n}{1-z^n}.$$

M. Le Roy a donc considéré des séries *autres* que des séries de puissances; il a considéré aussi le cas où la série des coefficients

$$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + \ldots$$

diverge sans que a_m soit croissant avec m.

Il était, au contraire, dans le cadre de ces Leçons, de ne prendre que des séries A dont le terme général a_m fût une *fonction croissante* de m. D'ailleurs, M. Le Roy a envisagé ce cas avec la série

$$F(x) = \sum a_n x^n, \qquad a_n = e^{(\log n)^2}.$$

En posant

$$\frac{2 \log \xi}{\xi} = -\log x,$$

M. Le Roy obtient

$$\underset{x=1}{F(x)} \sim \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\pi}{\log \xi}}\, e^{(\log \xi)^2}.$$

Revenons à la variable x,

$$\xi = e^{\sqrt{\frac{x(1-\log x)}{2}}},$$

d'où

$$F(x) \sim \sqrt{\pi}\, e^{-\sqrt{\frac{x(1-\log x)}{2}}} \left[\sqrt[4]{\frac{x(1-\log x)}{2}}\right]^{-1} e^{\frac{x(1-\log x)}{2}}.$$

En prenant, avec M. Borel, le terme maximum, on trouve

pour ce terme

$$e^{\frac{x(1-\log x)}{2}-\sqrt{2}\sqrt{x(1-\log x)}}$$

On voit combien sont *voisines* les expressions données par un *calcul asymptotique* et par la méthode du *terme maximum*.

Nous ne saurions, enfin, terminer ce Chapitre sans indiquer la mémorable étude, faite par M. J. Hadamard, d'une série sur la circonférence de son *cercle de convergence* ([1]). Nous en donnerons ici un très rapide aperçu.

Les travaux de M. Hadamard.

M. Hadamard met en évidence le rôle que jouent certaines séries formées en appliquant à la série donnée des *opérations fonctionnelles* simples. Ces opérations, que nous désignerons par D et $\mathfrak{D}$, se rattachent à ce que l'on a appelé la *dérivée à indice quelconque*. Avant le jour où M. Hadamard a mis en lumière le rôle de ces algorithmes, on pouvait se demander s'il y avait là autre chose qu'une « chinoiserie ».

1. *L'opération* D. — Soit $f(x)$ une fonction. Posons

$$f(x) = D^0 f(x).$$

$$\int_a^x f(x)\,dx = D^{-1} f(x),$$

$$\int_a^x [D^{-1} f(x)]\,dx = D^{-2} f(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En intégrant par parties l'on obtient

$$D^{-m} f(x) = \int_a^x \frac{(x-z)^{m-1}}{(m-1)!} f(z)\,dz.$$

Riemann ([2]) écrit, *par définition*, α étant un nombre *quelconque*

([1]) Thèse, *Journal de Math.*, 1892.

([2]) Voir l'*Édition allemande* de ses *Œuvres*, ce Mémoire n'existant pas dans la traduction française de M. Laugel.

négatif,

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-z)^{-\alpha-1} f(z)\,dz.$$

On vérifie que

$$D^{\alpha+\beta} = D^{\alpha'+\beta'},$$

pourvu que l'on ait

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta',$$

α, β, α', β' étant des nombres *négatifs*.

Soit maintenant α *entier positif par définition*, on pose

$$D^\alpha f(x) = \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}$$

et encore

$$D^\alpha(D^\beta) = D^{\alpha+\beta},$$

β étant < 0.

Par là D^α *est défini quel que soit le nombre réel* α, et l'on vérifie que toujours

$$D^{\alpha+\beta} = D^{\alpha'+\beta'}, \quad \text{si} \quad \alpha + \beta = \alpha' + \beta',$$

quels que soient α, β, α', β'.

Par le changement de variable $z = tx$, Riemann a obtenu

$$D^\alpha x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} x^{m-\alpha}.$$

II. *L'opération* $\mathfrak{D}$. — M. Hadamard pose $x = e^y$ et forme le symbole D en regardant $f(x)$ comme fonction de y. C'est l'opération $\mathfrak{D}$.

On trouve ainsi

$$\mathfrak{D}^\alpha x^m = m^\alpha x^m.$$

Cela posé, soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

On a

$$(1) \qquad x^\alpha D^\alpha f(x) = \sum a_m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} x^m,$$

$$(2) \qquad \mathfrak{D}^\alpha f(x) = \sum a_m m^\alpha x^m$$

et comme on a

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)}=(1+\varepsilon)m^{\alpha},$$

l'on voit que (1) et (2) sont absolument convergents en même temps. Ce sont les développements (2) que considère M. Hadamard.

III. *L'ordre d'une série.* — M. Hadamard introduit ensuite la notion d'*écart fini*, pour une fonction réelle ou non, notion voisine de la notion de *variation bornée* de M. Jordan. Si les deux intégrales

$$n\int_a^b \cos nx\, f(x)\,dx, \quad n\int_a^b \sin nx\, f(x)\,dx$$

restent finies et moindres que I, (a, b) étant des limites quelconques intérieures à l'intervalle (α, β), l'on dira que $f(x)$ est à *écart fini* et que l'*écart*, dans (α, β), est I.

On obtient alors ce théorème :

Si la fonction f est finie, continue, à écart fini sur la circonférence de convergence, la série formée par ses coefficients sera absolument convergente ou bien, si elle ne l'est pas, elle le deviendra lorsque l'on remplacera

$$f(x) \quad \text{par} \quad \mathcal{D}^{-\varepsilon} f(x),$$

ε étant positif, aussi petit que l'on veut.

On définit alors l'*ordre* en un point x_0 de la circonférence : *c'est un nombre* Ω *tel que,* au voisinage de x_0

$$\mathcal{D}^{-\Omega-\varepsilon} f(x),$$

soit *fini, continu, à écart fini, mais non point*

$$\mathcal{D}^{-\Omega-\varepsilon} f(x).$$

En un point ordinaire, l'ordre est $-\infty$. Les *points singuliers* sont seuls intéressants. Ou bien encore : *l'ordre est le plus petit nombre* Ω *tel que*

$$\left.\begin{array}{l}(1-\rho)^{\Omega} f(\rho e^{i\theta}) \\ (1-\rho)^{\Omega}\, \mathrm{I}\end{array}\right\} \text{ restent finies lorsque } \rho \text{ tend vers un.}$$

Nous ne pouvons insister sur ces questions. Nous voulions montrer que l'étude des séries

$$\mathcal{D} f(x),$$

se rattache étroitement à l'étude de la série

$$f(x),$$

dont le rayon de convergence est *un*.

Nous voulions aussi faire une remarque importante à notre point de vue. C'est même surtout en vue de cette réflexion finale que nous avons parlé ici du troisième Chapitre de la Thèse de M. Hadamard.

Dans ce remarquable Mémoire, *il est constamment supposé que les coefficients a_m*, lorsqu'ils sont croissants, sont des fonctions de *m à croissance régulière*.

Soit, par exemple,

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 x^m,$$

on a

$$\mathcal{D}^\alpha f(x) = \sum m^2 m^\alpha x^m,$$

qui, sur le cercle de convergence, devient

$$\sum m^{2+\alpha}.$$

Or une fonction qui admet une *dérivée finie* est à *écart fini* (1).

C'est le cas de la série précédente où l'on fait

$$\alpha = -3 - \varepsilon,$$

car on a alors la série convergente

$$\sum \frac{1}{m^{1+\varepsilon}},$$

---

(1) *Journal de Mathématiques*, p. 165; 1892.

tandis que si $\alpha = -3 + \varepsilon$ il vient

$$\sum \frac{1}{m^{1-\varepsilon}};$$

donc $f(x)$ au point $x = 1$ est *d'ordre* 3, c'est-à-dire *comparable* à $(1-x)^{-3}$.

De même soit

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty m x^m,$$

on trouve que le point singulier *un* est *d'ordre* 2, c'est-à-dire que $\varphi(x)$, en ce point, est *comparable* à $(1-x)^{-2}$.

Mais f et φ ont des *coefficients à croissance régulière*.

Extrayons de la première série la série

$$F(x) = \sum n^2 x^n,$$

en posant

$$n = m! \qquad m = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Les coefficients sont donc

$$1^2, \quad 2^2, \quad (3!)^2, \quad (4!)^2, \quad \ldots.$$

Ils sont *à croissance irrégulière*. Dans ces conditions, l'ordre de la fonction F au point *un* n'est plus du tout 3 comme pour f.

Les règles appliquées au cas des croissances régulières tombent en défaut, tout change.

Comparons, en effet, φ et F d'après le théorème de M. Cesàro.

Pour F la somme des $(p!)^2$ premiers coefficients est

$$\sum_1^{(p!)^2} a_i = (p!)^2 \left[1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2(p-1)^2} + \ldots + \frac{1}{(p!)^2}\right] < (p!)^2 \left(1 + \frac{p}{p^2}\right).$$

Pour φ la somme des $(p!)^2$ premiers coefficients est

$$\sum_1^{(p!)^2} b_i > \frac{1}{2}(p!)^2[(p!)^2 + 1],$$

d'où

$$\lim_{x=1} \frac{\varphi(x)}{F(x)} > \lim_{p=\infty} \frac{(p!)^2+1}{2\left(1+\frac{1}{p}\right)};$$

$\varphi(x)$ étant comparable à $(1-x)^{-2}$, $F(x)$ est *d'ordre moindre que* 2 au point *un*, alors que $f(x)$ était *d'ordre* 3.

On voit combien il est urgent, dans une question où se présentent des fonctions croissantes, de discerner les croissances *régulières* des croissances *irrégulières* [1].

---

(1) M. J. Hadamard vient de publier un excellent Ouvrage sur la *Série de Taylor* (chez Carré, 1901), trop tard pour que nous ayons pu nous en servir pour cette rédaction.

CHAPITRE VI.

SÉRIES A PLUSIEURS VARIABLES.

Séries entières.

Soit

$$f(x,y) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty A_{m,n} x^m y^n,$$

les coefficients et les variables étant *positifs*.

Pour que la série soit *entière*, converge quels que soient x et y, *il faut et il suffit* que l'on ait

$$\text{plus grande} \underset{(m+n=\infty)}{\text{limite}} \left| \sqrt[m+n]{A_{m,n}} \right| = 0.$$

On le voit immédiatement et directement. Cela résulte aussi du théorème démontré au début du paragraphe suivant.

Nous l'admettons donc, et nous allons étudier quelques questions relatives aux ordres en x et en y de la fonction $f(x, y)$.

Une fonction entière $F(z)$ *est* d'ordre ρ, *si l'on a*

$$|F(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

ε étant donné aussi petit que l'on veut, $r = |z|$ étant pris assez grand (¹). Nous appelons *ordre total* de $f(x, y)$ l'ordre en z de $f(z, z)$.

On a d'abord ce théorème :

Théorème I. — *Si y_0 est une valeur particulière positive de y, et si*

$$f(x, y_0)$$

est une fonction entière d'ordre ρ en x, *si l'ordre total de* $f(x, y)$ *est fini, l'ordre de*

$$f(x, y_1)$$

est encore ρ, quel que soit le *nombre positif* y_1.

(¹) Em. Borel, *Fonctions entières*, p. 61 ; 1900.

Supposons, par exemple, que l'ordre total soit 1, c'est-à-dire que, pour z assez grand, on ait

$$f(z, z) = \sum\sum a_{m,n} z^{m+n} = \sum A_{m+n} z^{m+n} < Ae^z.$$

Cela donne

$$A_{m+n} < \frac{A}{(m+n)!}.$$

Or

$$A_{m+n} = a_{m+n,0} + a_{m+n-1,1} + \ldots + a_{m,n} + \ldots + a_{0,m+n}.$$

D'où

$$(\alpha) \qquad a_{m,n} < \frac{A}{(m+n)!}$$

(les coefficients étant positifs).

Conservons cette inégalité (α) et cherchons-en une seconde.

Supposons, par exemple, pour simplifier l'exposition, que $y_0 = 1$ et que $f(x, 1)$ soit d'ordre $\frac{1}{2}$.

Nous aurons donc

$$f(x, 1) < \frac{B}{2} e^{x^{\frac{1}{2}}} < \frac{B}{2}\left(e^{x^{\frac{1}{2}}} + e^{-x^{\frac{1}{2}}}\right) < \frac{B}{2}\left[2\sum \frac{x^m}{(2m)!}\right],$$

d'où

$$(\beta) \qquad a_{m,n} < \frac{B}{(2m)!}.$$

Nous ferons usage tantôt de (α), tantôt de (β), suivant que l'un ou l'autre sera plus avantageux.

Proposons-nous donc de trouver l'ordre de

$$f(x, b),$$

soit, par exemple,

$$b > 2.$$

Le coefficient de x^m sera

$$(a_{m,0} + a_{m,1} b + \ldots + a_{m,m} b^m) + (a_{m,m+1} b^{m+1} + \ldots).$$

Il est moindre que

$$\frac{B}{(2m)!}(1 + b + b^2 + \ldots + b^m) + A\left[\frac{b^{m+1}}{(2m+1)!} + \frac{b^{m+2}}{(2m+2)!} + \ldots\right].$$

On voit que pour les m premiers termes nous nous servons de (β), pour tous les autres de (α).

Ce coefficient est moindre que

$$\frac{B}{(2m)!}\frac{b^{m+1}-1}{b-1}+\frac{A\,b^{m+1}}{(2m)!}\left[\frac{1}{2m+1}+\frac{b}{(2m+1)(2m+2)}+\dots\right]$$

et, pour m assez grand, moindre que

$$\frac{(A+B)\,b^{m+1}}{(2m)!}.$$

Mais ceci n'est autre chose que le coefficient de x^m dans le développement

$$\frac{A+B}{2}\left[e^{(bx)^{\frac{1}{2}}}+e^{-(bx)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

C'est ce que nous voulions établir.

Nous pouvons démontrer un second théorème.

Théorème II. — *x_0 et y_0 étant deux valeurs positives quelconques de x et y, si la fonction entière $f(x, y_0)$ est d'ordre ρ et si $f(x_0, y)$ est d'ordre ρ', l'ordre total de $f(x, y)$ est* au plus *égal à $\rho+\rho'$.*

Supposons, par exemple, $\rho=\frac{1}{2}$, d'où

$$a_{m,n}<\frac{B}{(2m)!} \tag{I}$$

(d'après ce qui précède).

Exprimons que l'ordre de la fonction en y est déterminé, par exemple qu'il est α pour $x=1$, ce qui donne

$$a_{0,n}+a_{1,n}+\dots+a_{m,n}+\dots<\frac{C}{\left(\frac{n}{\alpha}\right)!},$$

ou, *a fortiori*,

$$a_{m,n}<\frac{C}{\left(\frac{n}{\alpha}\right)!}, \tag{II}$$

ce qui peut s'écrire, puisque p^p est asymptotiquement peu différent de $p!$,

$$a_{m,n}<\frac{C}{n^{\frac{n}{\alpha}}}. \tag{II}$$

Nous emploierons (I) ou (II) suivant les circonstances :

1° Supposons

$$2m > \frac{n}{\alpha}.$$

Nous pouvons écrire, d'après (I),

$$a_{m,n} < \frac{B}{(2m)!} < \frac{D}{\left(\frac{m+n}{l}\right)!},$$

à condition que l'on ait

(III) $$\frac{m+n}{l} < 2m;$$

2° Supposons

$$2m < \frac{n}{\alpha}.$$

Nous pourrons écrire, d'après (II),

$$a_{m,n} < \frac{C}{\left(\frac{n}{\alpha}\right)!} < \frac{D}{\left(\frac{m+n}{l'}\right)!}$$

à condition que l'on ait

(IV) $$\frac{m+n}{l'} < \frac{n}{\alpha}.$$

Or (III) et (IV) sont vérifiés, en tenant compte respectivement de (I) et (II), si l'on prend

$$l = l' = \frac{1}{2} + \alpha.$$

Donc l'ordre total est *au plus* l, c'est-à-dire *au plus* égal à la somme des ordres en x et en y des fonctions entières $f(x, y_0)$, $f(x_0, y)$.

Le théorème est établi.

Les résultats précédents s'étendent sans peine aux fonctions entières de plusieurs variables ; on peut aussi les étendre à des cas où l'on suppose l'ordre *infini* par rapport à l'une des variables x, y, mais où l'on donne, cependant, une limite supérieure de la croissance.

Nous conviendrons de dire que l'ordre d'une fonction entière

$f(z)$ est inférieur à ω si le module maximum croît moins vite que

$$e^{e^{|z|}},$$

que cet ordre est inférieur à ω^2 si le module maximum croît moins vite que

$$e^{e^{e^{|z|}}}$$

Nous aurons, par exemple, ce théorème :

THÉORÈME III. — *Si la fonction entière à coefficients* positifs *est telle que*

$$f(x, y_0) \text{ soit d'ordre } \rho,$$
$$f(t, t) \quad \text{soit d'ordre} < \omega,$$

x_0 *étant un nombre* positif *particulier, on peut affirmer que l'ordre de* $f(x, y_1)$ *est égal à* ρ *quel que soit le nombre* positif y_1 (¹).

Nous avons, en effet, par hypothèse

$$f(t, t) = F(t) < e^{e^t}.$$

Posant

$$F(t) = \sum c_q t^q,$$

il vient

$$c_q < \frac{e^{e^t}}{t^q}.$$

Cherchons le *minimum* du second membre. Annulons la dérivée logarithmique

$$e^t - \frac{q}{t},$$

d'où

$$c_q < e^{\frac{t}{q} - q \log t} < e^{-q \log t}$$

car $\frac{1}{t}$ est négligeable par rapport à $\log t$, d'où enfin

$$c_q < \frac{1}{t^q} < \frac{1}{(\log q)^q}.$$

[On voit que l'on a affaire à $(\log q)^q$ au lieu de q^q que l'on trouvait dans l'hypothèse d'un ordre total fini.]

(¹) *Comptes rendus*, 22 avril 1901. — *Voir* la *Note* de M. Émile Borel.

Cela posé, si l'ordre en x est α pour $y=1$, l'ordre en x est encore *fini* pour y pris quelconque et nous avons

(I) $$a_{m,n} < \frac{1}{[\log(m+n)]^{m+n}},$$

(II) $$a_{m,n} < \frac{1}{(m)^{\frac{m}{\alpha}}}.$$

Le coefficient de x^m, savoir

$$a_{m,0} + a_{m,1}\,y + \ldots a_{m,n-1}\,y^{n-1} + \ldots$$

est donc inférieur à

$$\frac{1}{(m)^{\frac{m}{\alpha}}}(1 + y + y^2 + \ldots + y^{n-1})$$
$$+ \frac{y^n}{[\log(m+n)]^{m+n}} + \frac{y^{n+1}}{[\log(m+n+1)]^{m+n+1}} + \ldots.$$

Supposons, pour simplifier,

$$y > 2,$$

alors le coefficient

$$1 + y + y^2 + \ldots + y^{n-1}$$

est inférieur à y^n.

Prenons maintenant $n = \frac{m \log m}{\log_2 m}$, notre coefficient de x^m sera inférieur à

$$\frac{y^n}{(m)^{\frac{m}{\alpha}}} + \frac{y^n}{[\log(m+n)]^{m+n}} + \ldots$$
$$< \frac{y^n}{m^{\frac{m}{\alpha}}} + \frac{y^n}{[\log(m+n)]^{m+n}}\left[\frac{1}{1 - \frac{y}{\log(m+n)}}\right]$$
$$< \frac{y^n}{m^{\frac{m}{\alpha}}}\,\frac{y^n}{[\log(m+n)]^{m+n}} > \frac{y^n}{m^{\frac{m}{\alpha+\varepsilon}}},$$

puisque

$$[\log(m+n)]^{m+n} > (m)^{\frac{m}{\alpha}}.$$

L'ordre en x, pour cette valeur de y, est bien α, comme nous le voulions montrer.

Il est évident que ces théorèmes et les théorèmes analogues relatifs au cas de n variables, ne s'appliquent plus au cas où *les coefficients n'ont pas tous le même signe*. Soit, par exemple,

$$\varphi(x, y) = e^{x^2} \sin \pi y + e^x.$$

On voit que $\varphi(x, n)$ est d'ordre 1, tandis que, si y a d'autres valeurs, l'ordre est 2.

L'étude du cas général demandera que l'on pose des hypothèses assez compréhensives et constitue un très intéressant sujet de recherches; il fallait commencer par le cas des coefficients de même signe.

Rayons de convergence associés.

Nous allons, d'après un Mémoire de M. E. Lemaire (1), étudier la convergence absolue de la série

$$\sum\sum a_{p,q} x^p y^q.$$

Nous adopterons d'ailleurs le langage relatif au domaine *complexe,* quoique, en principe, nous considérions seulement des séries à coefficients et à variables *positifs*.

On sait (théorème d'Abel) que si la série est absolument convergente au point (x_0, y_0), elle l'est encore en tout point (x, y) si l'on a

$$|x| < |x_0|, \qquad |y| < |y_0|.$$

Soient O et O′ les origines dans les plans x et y; C et C′ deux circonférences de centres O et O′ et de rayons r et r'.

Nous dirons que les deux cercles forment un *système de cercles de convergence* si la série converge absolument en tout point (x, y), tel que x soit dans l'intérieur de C et y dans l'intérieur de C′.

r et r' seront dits *rayons de convergence associés*.

M. Lemaire se propose d'obtenir des rayons associés dont le rapport soit un nombre *donné* K.

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques;* 1896.

Soit une suite à deux indices

$$\ldots, \quad h_{p,q}, \quad \ldots,$$

et considérons les termes tels que l'on ait

$$p + q = n,$$

La plus grande des limites, dans ces conditions, pour $n = \infty$, sera le plus grand élément H de l'ensemble dérivé (*voir* p. 10).

Prenons, dans ces conditions (c'est-à-dire posant $p + q = n$ et n croissant indéfiniment), la plus grande des limites de

$$\left|\sqrt[n]{a_{p,q} K^q}\right|.$$

Soit $\lambda(K)$ cette plus grande limite. On a ce théorème

Théorème. — *Les deux nombres*

$$r = \frac{1}{\lambda(K)}, \qquad r' = \frac{K}{\lambda(K)}$$

constituent, quel que soit K, *un système de rayons associés; et l'on a*

$$r\lambda\left(\frac{r'}{r}\right) = 1.$$

En effet, dès que l'on a $n > N$, il en résulte

$$\left|\sqrt[n]{a_{p,q} K^q}\right| < \lambda(K) + \varepsilon,$$

ε tendant vers *zéro* lorsque N devient *infini*. Or, ceci donne

$$(p + q = n),$$

$$|a_{p,q}| \left(\frac{1}{\lambda + \varepsilon}\right)^p \left(\frac{k}{\lambda + \varepsilon}\right)^q < 1,$$

ce qui prouve la *convergence absolue* pour

$$|x| < \frac{1}{\lambda + \varepsilon},$$

$$|y| < \frac{K}{\lambda + \varepsilon}$$

et la *divergence* si les deux inégalités ci-dessus sont renversées.

Enfin, éliminant K entre les deux équations qui donnent r, r',

on obtient la relation annoncée entre r et r'. Le théorème de M. Lemaire est démontré.

Si l'un des points x, y vient sur la circonférence de son cercle de convergence, il y a *doute* relativement à la convergence de la série $\sum\sum a_{p,q}x^p y^q$.

Il peut arriver, d'ailleurs, qu'à *une* valeur de r corresponde une *infinité* de valeurs de r'.

Soit, par exemple, la série de Mac Laurin correspondant à la fonction

$$\frac{1}{(1-x)(2-y)},$$

on a des rayons associés en prenant ou bien

$$r = 1,$$
$$r' < 2,$$

ou bien

$$r < 1,$$
$$r' = 2.$$

En ce cas, l'élimination de K est faite d'avance.

Cette analyse s'étend de suite aux séries

$$\sum\sum\cdots\sum a_{p_1, p_2, \ldots, p_i} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_i^{p_i}.$$

Soit $\lambda(K_1, K_2, \ldots, K_{i-1})$ la plus grande des limites de

$$\left|\sqrt[n]{a_{p_1, p_2, \ldots, p_i} K_1^{p_1} K_2^{p_2} \ldots K_{i-1}^{p_{i-1}}}\right|$$

pour

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_i) = \infty,$$

les $(i-1)$ lettres K représentant des nombres *donnés* arbitraires, on a *i rayons associés* donnés par

$$\frac{r_1}{K_1} = \frac{r_2}{K_2} = \ldots = \frac{r_i}{1} = \frac{1}{\lambda}$$

avec

$$r_i \lambda\left(\frac{r_1}{r_i}, \frac{r_2}{r_i}, \ldots, \frac{r_{i-1}}{r_i}\right) = 1.$$

Séries syntagmatiques.

Considérons une série réelle

$$\sum\sum a_{p,q} x^p y^q$$

et étudions la zone de convergence, c'est-à-dire l'aire du plan des xy où peuvent se mouvoir x et y, de manière que la série converge toujours.

Nous pouvons d'abord prendre un nombre de termes de plus en plus grand, *sans aucune loi* pour la formation du groupe, et voir s'il y a, dans ces conditions, une limite pour la somme : ce sera le groupement selon le mode A.

Nous pouvons, en second lieu, étudier la convergence de la série des *groupes homogènes :* ce sera le groupement selon le mode B.

Nous pouvons, enfin, ordonner la série double selon les puissances de l'*une des variables :* ce sera le groupement selon le mode C.

Les trois modes A, B, C ne donnent pas, en général, la même zone de convergence.

Soit, par exemple, la série de développement de

$$\frac{1}{1-x-y}.$$

Le mode A donne

$$(a) \qquad 1+\ldots+\frac{n!}{p!\,q!}x^p y^q+\ldots \quad (p+q=n).$$

Le mode B donne

$$(b) \qquad 1+(x+y)+\ldots+(x+y)^n+\ldots.$$

Le mode C donne enfin

$$(c) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}+\dfrac{y}{(1-x)^2}+\dfrac{y^2}{(1-x)^3}+\ldots \\ \quad =\displaystyle\sum_{\alpha=0}^{\infty} x^\alpha + y\left(\sum \alpha x^{\alpha-1}\right)+y^2\left[\sum \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}x^{\alpha-2}\right]+\ldots. \end{cases}$$

Nous voyons que (a) converge si l'on a

$$|x| + |y| < 1$$

et (b) converge si l'on a

$$|x + y| < 1,$$

(c) converge si l'on a, à la fois,

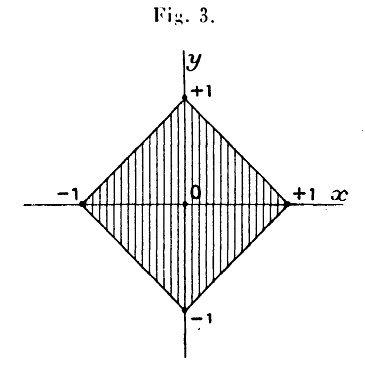
$$\left|\frac{y}{1 - x}\right| < 1,$$

$$|x| < 1.$$

Cauchy avait remarqué ces faits qui rendent *si difficile l'étude des séries à plusieurs variables.*

Il appelait *syntagmatiques* les séries telles que celle qui précède, *convergentes* avec le mode C dans des régions où, par les modes de groupement A et B, elles *divergeraient.* Les dessins ci-après montrent les zones de convergence A, B, C.

Fig. 3.



Ces remarques de Cauchy prennent une très grande importance lorsqu'on les rapproche des recherches récentes de M. Mittag-Leffler sur le prolongement analytique. Par une méthode qui lui est personnelle et complètement indépendante des travaux de Cauchy, M. Mittag-Leffler est arrivé à des résultats de la plus haute importance, précisément au moyen d'un groupement convenable des termes dans des séries multiples à plusieurs variables. Mais

nous devons nous borner à ces brèves indications, car l'étude de

Fig. 4.

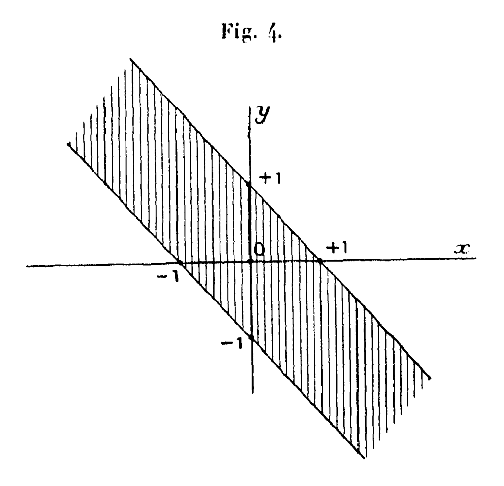
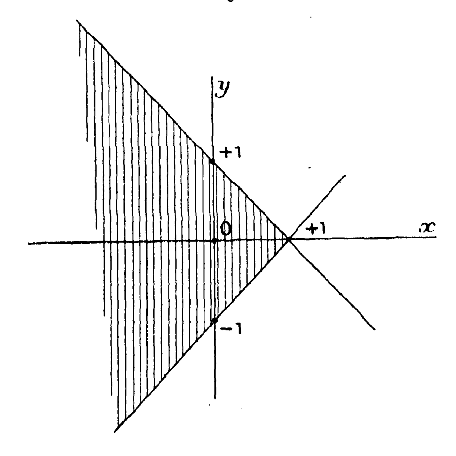


Fig. 5.



ces travaux nous éloignerait trop de notre sujet (¹).

(¹) *Voir* Mittag-Leffler, *Acta Mathematica*, t. XXIII et XXIV; Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique;* Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, Chap. VI.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

30664 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.